Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

"Existencia y unicidad de soluciones de un problema elíptico de Kirchhoff con término singular"

TESIS

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática con mención en Matemática Computacional

AUTOR

Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

ASESOR

Eugenio CABANILLAS LAPA

Lima, Perú

2018

Referencia bibliográfica

Luque, J. (2018). *“Existencia y unicidad de soluciones de un problema elíptico de Kirchhoff con término singular”*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas / Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

7vop
640A

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 12:40 horas del día lunes 03 de setiembre del dos mil dieciocho, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra e integrado por los siguientes miembros, Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre (Jurado Evaluador); Mg. Claudio Fernando Balcazar Huapaya (Jurado Informante), Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos (Jurado Evaluador) y el Dr. Eugenio Cabanillas Lapa como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE UN PROBLEMA ELÍPTICO DE KIRCHHOFF CON TÉRMINO SINGULAR» presentada por el Bachiller Jesús Virgilio Luque Rivera para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional.

Luego de la exposición del graduando, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales el Bachiller Jesús Virgilio Luque Rivera respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando el Bachiller Jesús Virgilio Luque Rivera aprobado con el calificativo de ....Muy Bueno (17)

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional** al Bachiller Jesús Virgilio Luque Rivera .

Siendo las 13:45 horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos
MIEMBRO

Mg. Claudio Fernando Balcazar Huapaya
MIEMBRO

Dr. Eugenio Cabanillas Lapa
MIEMBRO ASESOR

EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES DE UN PROBLEMA ELÍPTICO DE KIRCHHOFF CON TÉRMINO SINGULAR.

por:

Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional**.

Aprobada por:

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre
MIEMBRO

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra
PRESIDENTE

Mg. Carlos Gilberto Quicaño Barrientos
MIEMBRO

Mg. Claudio Fernando Balcazar Huapaya
MIEMBRO

Dr. Eugenio CABANILLAS LAPA
MIEMBRO ASESOR

LIMA - PERÚ

2018

FICHA CATALOGRÁFICA

Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

Existencia y unicidad de soluciones de un problema elíptico de Kirchhoff con término singular, (Lima) 2018
VII, 67p , 29.7cm, (UNMSM, Magister, Matemática Aplicada con mención en matemática computacional, 2018) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.
1. Unidad de Posgrado I. UNMSM/FCM II. Título (Series).

DEDICATORIA

A mis padres, hermanos, a mi esposa Silvia y mis hijos Jesús, Valeri y Sergio

AGRADECIMIENTO

En primer lugar a Dios por haberme dado las fuerzas para culminar este trabajo, así mismo un agradecimiento póstumo a la memoria mi padre Julián por haber compartido mis alegrías y tristezas y por los sabios consejos que llevaré hasta el fin de mis días, mi gratitud a mis madres María(abuela) , Victoria y Adela (tía) y a mis hermanos Dina y César porque con ellos compartí una infancia feliz a pesar de las dificultades que nos dá la vida.

Asi mismo debo agradecer de manera especial a mi asesor Dr. Eugenio Cabanillas Lapa por aceptarme realizar este trabajo bajo su dirección, su apoyo y sugerencias y el tiempo dedicado a sido un aporte invaluable. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de este trabajo.

También quiero agradecer a mis maestros de la facultad por compartir sus conocimientos y sabiduría que han contribuido en mi desarrollo profesional, agradezco a todos los que fueron mis compañeros de clase durante todos los niveles de la universidad ya que gracias al compañerismo, amistad y apoyo moral han aportado en alto porcentaje a mis ganas de seguir adelante en mi carrera profesional. Mi gratitud y agradecimiento a mis amigos Willy Barahona, Victoriano Yauri, Leonardo Dávila, Marco Tipismana que me brindaron su amistad y apoyo incondicional en momentos difíciles, gracias amigos.

Mi agradecimiento al Vicerrectorado de Investigación y Posgrado (VRIP) por el apoyo económico para culminar este trabajo A Silvia mi amiga, mi cómplice, mi compañera y mi esposa, gracias por compartir mis sueños, gracias por todos estos años de sacrificio y privaciones y por ese apoyo incondicional; a mis hijos por ser la razón de mi existir, sin ellos las fuerza de levantarme cada día para ser mejor persona no sería una realidad, gracias Jesús, Valeri y Sergio por existir.

RESUMEN

Existencia y unicidad de soluciones de un problema elíptico de Kirchhoff con término singular.

Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

Septiembre, 2018

Asesor : **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa**

Grado obtenido : **Magister en Matemática Aplicada con mención en Matemática Computacional**.

En este trabajo, consideramos el siguiente problema elíptico singular del tipo Kirchhoff:

$$\left\| \begin{array}{ll} -M\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)\Delta u dx = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma}} + k(x)u^{\alpha} & \text{en } \Omega \\ \\ u > 0 & \text{en } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Bajo apropiadas condiciones sobre los datos estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones positivas.

PALABRAS CLAVES: Ecuación elíptica de Kirchhoff con término singular, Solución débil, Método de Galerkin, Desigualdad de Hardy- Sobolev

ABSTRACT

Existence and uniqueness of solutions of an elliptical problem of Kirchhoff with singular term

Jesús Virgilio LUQUE RIVERA

Septiembre, 2018

Assessor : **Dr. Eugenio Cabanillas Lapa**

degree qualification : **Master in Matematics Applied with mention in Computational Matematics**.

In this work, we consider the following singular elliptic equation of Kirchhoff type

$$
\left\|\begin{array}{ll}
-M\left(\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)\Delta u dx = \dfrac{h(x)}{u^{\gamma}} + k(x)u^{\alpha} & \text{in } \Omega \\
\\
\qquad u > 0 & \text{in } \Omega \\
\\
\qquad u = 0 & \text{on } \partial\Omega
\end{array}\right.
$$

Under suitable condition on the data, we study both the existence and uniqueness of positive solutions

KEY WORDS: Kirchhoff elliptical equation with singular term, Weak solution, Galerkin method, Inequality of Hardy-Sobolev.

Índice general

Introducción

Diversos procesos fundamentales en la naturaleza están descritos por ecuaciones en derivadas parciales, como difusión de calor, oscilaciones, interacción molecular, dinámica poblacional, etc. Un fenómeno oscilatorio en particular fue descrito en el trabajo de Kirchhoff [8], mediante la ecuación casilineal unidimencional:

$$u_{tt} - M\left(\int_0^L u_x^2(x,t)\,dx\right)u_{xx} \quad , \ \text{en} \ \ ]0,L[\times]0,+\infty[$$

Que describe las pequeñas vibraciones no lineales de una cuerda elástica. Este modelo fue generalizado más adelante por Lions [9] a $\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f \quad , \ \text{en} \ \ \Omega\times]0,+\infty[\,,$$

El estado estacionario asociado a esta ecuación es

$$(1)\left\| \begin{array}{lll} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = f & , & \text{en } \Omega \\ \\ \qquad\qquad u = 0 & , & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

que es un modelo no local típico, y que reviste gran importancia en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptico. En relación a este modelo se tiene la siguiente generalización

$$\left\| \begin{array}{lll} -M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u = \dfrac{h(x)}{u^\gamma} + k(x)u^\alpha & , & \text{en } \Omega \\ \\ \qquad u = 0 & , & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

con $h,k \in C(\overline{\Omega})$, $h,k \geq 0$, $h,k \neq 0$ y $\alpha,\gamma \in]0,1[$

cuyo estudio presenta interesantes dificultades matemáticas por su naturaleza no local y término no singular, el cual en este trabajo estamos interesados en estudiar, así como investigar las posibilidades de sus aplicaciones.

En esta última década el estudio de los sistemas elípticos no locales del tipo Kirchhoff ha cobrado particular interés, sobre todo después del trabajo de Lions [21], debido a que son modelos que representan una gran variedad de situaciones físicas en Ciencias e Ingeniería y que requiere herramientas nada triviales para resolverlos. Estos modelos han sido estudiados por diversos autores, entre los que destacan [9], [5], [21], [8]y [13], con diversas técnicas. El problema fue abordado con técnicas variacionales en [2], [5], [6], [11] y [23].

El modelo (1) ha sido generalizado a una ecuación del tipo p-laplaciano.

$$\left\| \begin{array}{ll} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\Delta_p u dx = f(x,u) \ , & \text{en } \Omega\times]0,+\infty[\\ \\ u = 0 \qquad\qquad , & \text{en } \partial\Omega \end{array} \right.$$

Este tipo de operador aparece en diversas áreas de la ciencia tales como Astronomía, Glaciología, Climatología, Fluidos No-Newtonianos, Extracción de Petróleo etc. [3].

En particular, los sistemas elípticos no locales del tipo (1), modelan difusión de especies o fenómenos físicos donde la temperatura tiene un rol central al desencadenar una reacción. Su espectro de estudio es amplio: desde la Física e Ingeniería a la Dinámica de Poblaciones. [2]

Los problemas parabólicos relacionados son de especial interés en teoría de dinámica poblacional. [13] , [25].

En este sentido los modelos, que incluyen operadores no locales del tipo Kirchhoff, han sido recientemente considerados por diversos investigadores, por lo que una exposición didáctica del articulo referencial [8], permitirá entender y explicar la metodología usada por los autores en la resolución de estos problemas, sirviendo como base de apoyo para el avance matemático en la comunidad científica de nuestro país.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo estableceremos las notaciones, las hipótesis sobre los datos y presentaremos en forma de proposiciones y teoremas los resultados básicos que serán utilizados en los capítulos posteriores.

1.1. Espacio de funciones continuas

Definición 1.1 *Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in N^n$. Se define los operadores:*

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n \quad ,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

El **soporte** de una función $f : X \to \mathbb{R}$, denotado por $Sopp(f)$, es la clausura del conjunto $\{x \in X : \ f(x) \neq 0\}$. Así, el soporte de f es el complemento del conjunto abierto más grande donde f se anula.

Definición 1.2 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$. se designa con $C^0(\Omega)$ el espacio de todas las funciones continuas definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$. Se designan los siguientes subespacios de $C^0(\Omega)$:*

$$C^m(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega) \ ; \ D^\alpha \varphi \in C^0(\Omega) \quad \forall \ |\alpha| \leq m\}$$

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

$C_0(\Omega) = \{ \varphi \in C^0(\Omega) \;\; ; \;\; \textit{soporte de } \varphi \quad \textit{es compacto en } \Omega \}$

$C_0^m(\Omega) = C^{\,m}(\Omega) \bigcap C_0(\Omega)$

$C_0^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap \{u/\, sopp(u) \;\; \textit{es compacto} \;,\; sopp(u) \subseteq \Omega\}$

$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega).$

$C_0^\infty(\Omega) = C^{\,\infty}(\Omega) \bigcap C_0(\Omega)$

Sobre $C^\infty(\Omega)$ *se define la norma de convergencia uniforme, como*

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|,$$

con el cual es un espacio de Banach.

Definición 1.3 *Sea* Ω *un abierto de* $\mathbb{R}^n$ *y* $m \in \mathbb{N}$. *Se designa con* $C^0(\overline{\Omega})$ *el espacio vectorial de todas las funciones continuas que son acotadas y uniformemente contínuas en* Ω *.*

$C^m(\overline{\Omega}) = \left\{ \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \;\; ; \;\; D^\alpha\varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \;\; , \;\; \forall \;\; |\alpha| \; \leq m \right\}$

$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^{\,m}(\overline{\Omega})$

$C_0(\overline{\Omega}) = \left\{ \; \varphi \in C^0(\overline{\Omega}) \;\; ; \;\; \textit{soporte de } \varphi \;, \;\; \textit{es compacto en } \overline{\Omega} \; \right\}$

$C_0^m(\overline{\Omega}) = C^{\,m}(\overline{\Omega}) \bigcap C_0(\overline{\Omega})$

$C_0^\infty(\overline{\Omega}) = C^{\,\infty}(\overline{\Omega}) \bigcap C_0(\overline{\Omega})$

donde: $\overline{\Omega}$ es la clausura de Ω.

Proposición 1.1 *El espacio vectorial* $C^m(\overline{\Omega})$ *es un espacio de Banach con la norma*

$$\left\|\varphi\right\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{\substack{x\in\overline{\Omega} \\ |\alpha|\leq m}} \left|D^\alpha\varphi(x)\right|$$

1.2. Espacios de Banach

Aquí hacemos una introducción a los Espacios de Banach, espacios que reciben su nombre en honor a Stefan Banach.

Definición 1.4 *Un espacio vectorial V se dice **normado** si existe una función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ (denominada norma en V) tal que, para todo $u, v \in V$ satisface:*

(i) (Positividad) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ si, y solo si, $u = 0_V$.

(ii) (Cambio de escalar) $\|\alpha\, u\| = |\alpha|\, \|u\|$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) (Desigualdad triangular) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

*Al par (V, $\|\|$) se le conoce con el nombre de **Espacio vectorial normado.***

Definición 1.5 *La distancia asociada a una norma$\|\cdot\|$ es d(x,y)=$\|x - y\|$. Se verifica fácilmente que d es una métrica. La topología asociada a una norma es la topología de espacio métrico inducida por la distancia asociada.*

Los límites de sucesiones en espacio normados y de funciones entre espacio normados, se expresan en términos de la norma. Por ejemplo, la continuidad de una función f entre dos espacio normados X, Y en un punto $a \in X$ se expresa: Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

El espacio normado es completo, si, toda sucesión de Cauchy en X converge, es decir

$$\forall (x_n) \subseteq X : \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in X.$$

*Todo espacio normado completo es un **Espacio de Banach.***

Si X, Y son espacio vectoriales, ambos sobre el campo real, la función $T : X \to Y$ que satisface $T(\alpha x + \beta z) = \alpha T(x) + \beta T(z)$, para escalares α, β y $x, z \in X$, es llamado **operador lineal.**

Definición 1.6 *Sean X, Y dos espacios normados. Un operador $T : X \to Y$ lineal es acotado si existe una constante $M \geq 0$ tal que*

$$\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X, \quad \textit{para todo} \quad x \in X.$$

Si no existe una constante que satisfaga esta desigualdad diremos que T es no acotado. Si $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado, definimos la norma del operador T mediante

$$\|T\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_X}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Teorema 1.1 *Un operador lineal es acotado si, y solo si, es continuo.*

El conjunto $L(X, Y)$ denota el conjunto de todos los operadores lineales que aplican X en Y, y $B(X, Y)$ el conjunto de todos los operadores en $L(X, Y)$ que son acotados. Éste último es un espacio de Banach si Y es un espacio de Banach, con respecto a la norma del operador.

Definición 1.7 (Inmersión) *Sean X, Y espacios normados, se dice que X está inmerso continuamente en Y, y se denota $X \hookrightarrow Y$, si:*

(i) X es subespacio vectorial de Y.

(ii) El operador identidad I definido sobre X es continuo, esto es:
$\exists\, C > 0\,,\ \|u\|_Y \leq C\,\|u\|_X\ ,\ \forall u \in X$

Definición 1.8 *Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Un **producto escalar** o **producto interno** definido en X es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que verifica:*

(i) (Aditiva) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in X$.

(ii) (Homogénea) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ para todo $u, v \in X$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

(iii) (Hermítica) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ para todo $u, v \in X$.

(iv) (Definida positiva) $\langle u, u \rangle \geq 0$ y $\langle u, u \rangle = 0$ si y solo si $u = 0$.

*Toda aplicación que verifica (i), (ii) y (iii) se llama forma **sesquilineal hermítica.** En este caso X es llamado espacio con **producto interno** o **Pre-Hilbert.***

Observación: En adelante toda los espacios estarán definidas en el campo real $\mathbb{R}$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Para cualquier u, v:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

Definición 1.9 *Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre-Hilbert completo con respecto a la métrica asociada. Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interior.*

Definición 1.10 *Una sucesión* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio normado es llamada convergente a un elemento* f *del espacio si, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n > N$ *tenemos* $\|f - f_n\| < \varepsilon$*. Si* f_n *converge a* f *escribimos* $f = \lim f_n$ *ó* $f_n \to f$*.*

Definición 1.11 *Dado* X, Y *espacios normados, se dice que hay una inmersión compacta de* X *en* Y*, denotado por* $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$*, si:*

(a) $X \hookrightarrow Y$

(b) $I : X \longrightarrow Y$ *es compacta, es decir* $\forall\ B$ *acotado* $\subseteq X : \overline{I(B)}$ *es compacto en* Y

Observación 1.1 *De (b) se deduce que si* $x_n \rightharpoonup x$ *en* X *entonces existe una subsucesión* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\geq 1}$ *tal que* $(x_{n_k}) \longrightarrow x$ *en* Y

Definición 1.12 *Se dice que un espacio de Hilbert* H *es separable, si existe un conjunto denso y numerable en* H*.*

Definición 1.13 Base Hilbertiana *Sea* H *un espacio de Hilbert separable, se llama base Hilbertiana (o base ortonormal) de* H *a toda sucesión* $(\psi_n)_{n\geq 1}$ *de elementos de* H*, que constituye un sistema completo en* H *y que verifica:*

(i) $(\psi_n, \psi_m) = 0, \forall m \neq n$
$\left\|\psi_n\right\| = 1$

(ii) *El espacio vectorial generado por* $(\psi_n)_{n\geq 1}$ *es denso en* H

Teorema 1.2 *Todo espacio de Hilbert separable admite una base Hilbertiana.*

Demostración.- Ver [4 Pág. 86].

1.2.1. Espacios $L^p(\Omega)$

Definición 1.14 *Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $1 \leq p < \infty$. Se designa al espacio vectorial de todas las clases de equivalencia de funciones medibles u definidas en Ω con valores en $\mathbb{R}$ tal que*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty$$

siendo la integral en el sentido de Lebesgue. La norma en $L^p(\Omega)$ está dado por:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Para el caso $p = \infty$, se define $L^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de funciones medibles que son esencialmente acotadas y para $u \in L^\infty(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\,\{c \ / \ |u(x)| \leq c \quad c.s. \text{ en } \Omega\}$$

Proposición 1.2 *:*

i) *Si $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach con la norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

ii) *Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

y la norma inducida es,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 57].

Teorema 1.3 *Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces se tiene*

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

Proposición 1.3 ***(Desigualdad de Hölder)***

Si $u \in L^p(\Omega)$ *y* $v \in L^q(\Omega)$ *con* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *entonces*

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

(si $p = 1, q = +\infty$*)*

Demostración.- Ver [15 Pág. 56].

Proposición 1.4 ***(Desigualdad de Hölder Generalizada)***

Sean $f_1, f_2, \ldots, f_k$*, funciones tales que* $f_i \in L^p(\Omega)$*, con* $1 \leq i \leq k$*,*
donde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$*. Entonces el producto*

$$f = f_1\, f_2\, f_3 \ldots f_k \in L^p(\Omega) \qquad y$$

$$\left\|f\right\|_{L^p(\Omega)} \leq \left\|f_1\right\|_{L^{p_1}(\Omega)} \left\|f_2\right\|_{L^{p_2}(\Omega)} \left\|f_3\right\|_{L^{p_3}(\Omega)} \cdots \left\|f_k\right\|_{L^{p_k}(\Omega)}$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 57].

Teorema 1.4 ***(Desigualdad de Minkowski)***

Si $1 \leq p < \infty$ *entonces*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 57].

Teorema 1.5 ***(Desigualdad de interpolación)***

Sea $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *con* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *entonces* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *y se tiene*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_p^{\theta} \,.\, \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$ *y* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demostración.- Ver [24 Pág. 4].

Teorema 1.6 .

Sean $1 \leq p < \infty$ *y* $u \in L^p(\Omega)$ *entonces* $C_0(\Omega)$ *es denso en* $L^p(\Omega)$

Demostración.- Ver [1 Pág. 28].

Teorema 1.7 .

$L^p(\Omega)$ *es separable para* $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Ver [4 Pág. 62].

Teorema 1.8 ***(Teorema de la Representación de Riesz)***

Sean $1 < p < \infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *y* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Entonces existe una única función* $u \in L^q(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \qquad \forall v \in L^p(\Omega) \qquad y \qquad \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 61].

Proposición 1.5 *Sea* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ *entonces existe una única función* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega)$$

y

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 63].

El espacio de las funciones localmente integrables en Ω es el conjunto

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}/u \ \text{ es medible y } \int_K |u|dx < \infty, \ \forall K \text{ compacto} \subseteq \Omega\}$$

Proposición 1.6 *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones acotada en* $L^p(\Omega)$ *y sea* $f \in L^p(\Omega)$ *tal que* $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$. *Entonces existe una subsucesión* (f_{n_k}) *tal que*

(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ *c.s. en* Ω

(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \ \forall k \in \mathbb{N}$ *y c.s. en* Ω*, con* $h \in L^p(\Omega)$.

Demostración.- Ver [4 Pág. 58].

Corolario. $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Ver [4 Pág. 58].

Teorema 1.9 (Teorema de Lusin) *Si f es una función medible, $f(x) = 0$ para $x \notin A$ donde $m(A) < \infty$ y $\varepsilon > 0$, entonces existe una función $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} g(x) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \quad y \quad m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon.$$

Demostración.- Ver [1 Pág. 15].

Definición 1.2.1 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$; $M^* = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \ / \ \Omega$ medible$\}$; se llama **función simple** en Ω a una función medible $s : \Omega \to \mathbb{R}$ que solo toma un número finito de valores, es decir, tal que $s(\Omega) = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. En este caso s puede expresarse de la forma*

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \chi_{A_i}(x)$$

donde $A_i = s^{-1}(\{a_i\}) = \{x \in \Omega : s(x) = a_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica del conjunto A_i.

Para construir la integral de Lebesgue, necesitamos el siguiente resultado fundamental, que nos permite aproximar funciones medibles.

Teorema 1.10 *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. Existe una sucesión de funciones simples de Ω en $\mathbb{R}$ tales que*

1. $0 \leq s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ *para todo $x \in \Omega$ y todo $n \in \mathbb{N}$.*

2. $\lim_n s_n(x) = f(x)$ *para todo $x \in \Omega$.*

Demostración.- Ver [19 Pág. 63].

1.2.2. La Integral de Lebesgue

Definición 1.15 *Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ-álgebra en X si M tiene las siguientes propiedades:*

1. $X \in M$.

2. *Si* $A \in M$ *entonces* $A^c \in M$

3. *Si* $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$, $A_i \in M$, $i = 1, 2, 3, ...$ *entonces* $A \in M$

Definición 1.16 *Si M es un σ-álgebra en X entonces se dice que X es un espacio medible y a los elementos de M se llaman conjuntos medibles en X.*

Definición 1.17 *Sea M un σ-álgebra sobre X. La función* $\mu : M \longrightarrow [0, +\infty]$ *es una medida positiva si satisface la propiedad de aditividad numerable, es decir, dada una familia numerable y disjunta* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *de elementos de M, entonces*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Definición 1.18 *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Se define la medida exterior de Lebesgue de* Ω, *denotado* $m^*(\Omega)$, *mediante*

$$m^*(\Omega) = \operatorname{ínf}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Vol(Q_n) \quad , \quad \Omega \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \quad , \quad Q_n \ \ \textit{rectángulos cerrados} \right\}$$

Observación:

$$\begin{aligned} m^* : \ \ P(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \ \ [0, +\infty > \\ \Omega &\longmapsto \ \ m^*(\Omega) \end{aligned}$$

donde $P(\mathbb{R}^n)$: conjunto de partes de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.11 .

(i) $m^*(\phi) = 0$

(ii) *Si* $A \subseteq B$, $m^*(A) \leq m^*(B)$

(iii) *Sea* $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una familia numerable de conjuntos; entonces*

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(\Omega_n)$$

(iv) $m^*(\Omega) = \text{ínf}\{m^*(G) \ / \ G \ \textit{abierto} \ \ \Omega \subseteq G\}$

(v) *para todo conjunto* Ω *y para todo* $x \in \mathbb{R}^n$

$$m^+(x+\Omega) = M^*(\Omega)$$

Demostración.- Ver [26 Pág. 32].

Definición 1.19 *Un conjunto* Ω *se dice Lebesgue medible, si verifica la siguiente propiedad para todo conjunto* E

$$m^*(E) = m^*(E\cap\Omega) + m^*(E-\Omega)$$

Sea $M^* = \{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \ / \ \Omega \quad \text{es medible}\}$

Definición 1.20 *Se llama medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *a la restricción de la medida exterior* m^* *a* M^**, es decir* $m = m^*|_{M^*}$*; se tiene así la función:*

$$\begin{aligned} m: \ M^* &\longrightarrow \ [0,+\infty] \\ A &\longmapsto \ m(A) = m^*(A) \end{aligned}$$

Definición 1.21 *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ *y* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se dice que* f *es Lebesgue medible o simplemente medible si para todo abierto* G *de* $\mathbb{R}$*, la imagen inversa*

$$f^{-1}(G) = \{x\in\Omega \ / \ f(x)\in G\}$$

es un conjunto medible en $\mathbb{R}^n$*.*

Definición 1.22 *Sea* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ *y* $s : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. *Una función simple no negativa,*

$$s = \sum_{i=1}^{k} a_i\chi_{A_i} \ , \ A_i \cap A_j = \Phi \ , \ i \neq j \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i = \Omega$$

se define la integral de s *en* Ω *por*

$$\int_\Omega s = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i)$$

Definición 1.23 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Una función medible con $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$, se define la integral de f en Ω, denotada $\int_\Omega f$, mediante*

$$\int_\Omega f = \sup \left\{ \int_\Omega s \;\; / \;\; s \;\; \textit{es función simple} \;\; , \;\; 0 \leq s \leq f \right\}$$

Definición 1.24 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, una función medible. Definimos*

$$f^+(x) = \text{máx}\{0, f(x)\}$$

$$f^-(x) = \text{máx}\{0, -f(x)\}.$$

De esta manera se tiene que $f = f^+ - f^-$ donde f^+, f^- son las funciones (no negativas) arriba definidas.

Definición 1.25 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \in M^*$ y $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, una función medible. Se define la integral de f en Ω, denotada $\int_\Omega f$, mediante*

$$\int_\Omega f = \int_\Omega f^+ - \int_\Omega f^- \quad .$$

Esta integral recibe el nombre de integral de Lebesgue de f en Ω.

Teorema 1.12 (Convergencia Monótona-Lema de Fatou) *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables no negativas, entonces*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx.$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 55].

Teorema 1.13 (Convergencia Dominada de Lebesgue) *Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones integrables. Supongamos que:*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *c.t.p. en* Ω.

ii) *Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para todo n; $|f(x)| \leq g(x)$ c.t.p. en Ω entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) \, dx = \int_\Omega f(x) \, dx.$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 54].

Teorema 1.14 *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \to [0, +\infty]$ medible. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x, \cdot) : y \longmapsto f(x, y)$, es medible para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \displaystyle\int f(x, y)\, dy$ es medible.

(iii) $\displaystyle\int g\, dx = \int f$, es decir la integral de f coincide con sus integrales iteradas.

Demostración.- Ver [15 Pág. 18].

La demostración de este teorema generalmente se reduce al caso en que $f = \chi_E$, la función característica de un conjunto medible E y se hace uso de los siguientes hechos:

(a) Si una función $f \geq 0$ satisface el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $cf \geq 0$, cualquiera que sea la constante $c \geq 0$.

(b) Si $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones no negativas que satisfacen el teorema de Tonelli, entonces también lo satisface la función $\sum f_k$.

Teorema 1.15 (Teorema de Fubini) *Sea $f : \mathbb{R}^{m+k} \longrightarrow [0, +\infty]$ integrable. Entonces:*

(i) La función de la variable $y \in \mathbb{R}^k$, $f(x, \cdot) : y \longmapsto f(x, y)$, es integrable para casi todo $x \in \mathbb{R}^m$.

(ii) La función g, definida para casi todo x por $g(x) = \displaystyle\int f(x, y)\, dy$ es integrable.

(iii) $\displaystyle\int g\, dx = \int f$.

Demostración.- Ver [15 Pág. 19].

Teorema 1.16 (Teorema de representación de Riesz) *Sea X un espacio de Hilbert y $x^* \in X^*$. Entonces existe un único $y \in X$ tal que $x^*(x) = \langle x, y\rangle$, para todo $x \in X$ y en este caso $\|x^*\|_{X^*} = \|y\|_X$.*

Demostración.- Ver [4 Pág. 81].

Definición 1.26 *Sea X un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{R}$; llamamos **espacio dual algebráico** de X, que denotamos por, X^*, al espacio vectorial*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{R} / \; x^* \quad es\ lineal \quad y\ continuo\}.$$

En este espacio disponemos de una norma

$$\begin{aligned} \|x^*\| &= \text{ínf}\{K > 0 : \; |x^*| \leq K\|x\| \quad para\ todo \quad x \in X\} \\ &= \sup\{|f(x)| : \; x \in X, \; \|x\| \leq 1\} \end{aligned}$$

para todo $x^* \in X^*$.

*La completitud de $\mathbb{R}$ nos asegura que X^* es un espacio completo. El espacio de Banach X^* recibe el nombre de **dual topológico** del espacio normado X.*

1.2.3. Espacios Reflexivos

Si X es un espacio normado, el espacio bidual, también llamado segundo dual de X, es el espacio de Banach $X^{**} := (X^*)^* = L(X^*, \mathbb{R})$, con norma

$$\begin{aligned} \|x^{**}\| &:= \sup\{|x^{**}(x^*)| : \; x^* \in B_{X^*}\} \\ &= \text{mín}\{K > 0 : \; |x^{**}(x^*)| \leq K\|x^*\| \quad \text{para todo} \quad x^* \in X^*\}. \end{aligned}$$

De la desigualdad , $|x^*(x)| \leq \|x^*\|\,\|x\|_X$, válida para cualquier $x \in X$ y $x^* \in X^*$, deducimos que los elementos de X son funcionales lineales continuos en X^*.

Observación: Definiendo el operador

$$\begin{aligned} J : \quad X &\longrightarrow \quad X^{**} \\ x &\longmapsto \quad J_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad f : \longmapsto \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{aligned}$$

resulta que es lineal, inyectivo e isométrico.

Este operador se llama la inyección conónica de X en X^{**}

Definición 1.27 *Se dice que un espacio de Banach es **reflexivo** cuando la inyección canónica de X en X^{**} es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$.*

En este caso J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}

Teorema 1.17 *Sea* $1 < p < +\infty : L^p(\Omega)$ *es reflexivo.*

Demostración.- Ver [4 Pág. 59].

Proposición 1.7 *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente en* $C_0(\Omega)$*, que converge puntualmente a una función* $f \in C_0(\Omega)$*. Entonces* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a* f*.*

Demostración.- Ver [4 Pág. 14].

1.3. Distribuciones

Definición 1.28 *La* n*-upla* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *se llama* ***multi-índice*** *natural si* $\alpha_i \in \mathbb{N}$*,* $i = 1, 2, ..., n$*. El orden de* α *es el mínimo*

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$$

La suma de dos multi-índices, α, β *es* $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n)$*. Decimos que* $\beta \leq \alpha$ *si* $\beta_j \leq \alpha_j$ *para todo* $j = 1, 2, ..., n$*. Para denotar la derivada parcial haremos*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} \cdot D_2^{\alpha_2} \cdots D_n^{\alpha_n},$$

conviniendo que $D^{(0,0,...,0)}\phi = \phi$*.*

Por otra parte, el gradiente de una función de valores reales ϕ *es denotado por*

$$D\phi(x) := (D_1\phi(x), D_2\phi(x), ..., D_n\phi(x)).$$

Definición 1.29 (Continuamente compacto) *Si* $G \subset \mathbb{R}^n$ *es no vacío, diremos que* G *es continuamente compacto en* Ω *y denotado por* $G \Subset \Omega$ *, si* $\overline{G} \subset \Omega$ *y* $\overline{G}$ *es compacto.*

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$, una sucesión $\left\{\phi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de funciones en $C_0^\infty(\Omega)$ es llamada convergente en el sentido del espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ a la función $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si satisface las siguientes propiedades:

(i) Existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j.

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} D^{\alpha}\phi_j(x) = D^{\alpha}\phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Las propiedades de la convergencia de $\left\{\phi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ definen una topología τ localmente convexa en el espacio vectorial $C_0^{\infty}(\Omega)$. Por lo tanto $C_0^{\infty}(\Omega)$ dotado de esta topología es un espacio vectorial topológico, que denotamos $\mathcal{D}(\Omega)$, así $\mathcal{D}(\Omega) = (C_0^{\infty}(\Omega), \tau)$.

El espacio de distribuciones (o espacio de Schwartz) en Ω es el conjunto

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{N} : T\text{es lineal y continua}\}$$

que es un espacio vectorial con las operaciones usuales de aplicaciones;
Para $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$:

- $(S + T)(\phi) = S(\phi) + T(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
- $(cT)(\phi) = cT(\phi)$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $c \in \mathbb{R}$.

El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es dotado con una convergencia: una sucesión $\{T_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si $T_n(\phi) \to T(\phi)$ en $\mathbb{R}$ para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. En este caso, se dice que $\{T_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a T **en el sentido distribucional.**

Una función u definida en casi todas partes (ctp) en Ω, es llamada localmente integrable en Ω siempre que $u \in L^1(U)$ para cada abierto $U \Subset \Omega$, en este caso denotaremos $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Ejemplo. Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. El funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$T_u(\phi) := \int_{\Omega} u(x)\,\phi(x)\,dx, \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.1}$$

es una distribución.
En efecto, sean $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} T_u(\phi_1 + \beta\phi_2) &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1 + \beta\phi_2)(x)\,dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)(\phi_1(x) + \beta\phi_2(x))\,dx \\ &= \int_{\Omega} u(x)\,\phi_1(x)\,dx + \beta \int_{\Omega} u(x)\,\phi_2(x)\,dx \\ &= T_u(\phi_1) + \beta T_u(\phi_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto se verifica que T_u es lineal.

Observación. No todas las distribuciones $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tienen la forma T_u definida en (1.1) para algún $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

En efecto, sea $\delta : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por $\delta(\phi) = \phi(0)$, para toda $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{C}$

$$\delta(\phi_1 + \beta\phi_2) = (\phi_1 + \beta\phi_2)(0) = \phi_1(0) + \beta\phi_2(0) = \delta(\phi_1) + \beta\delta(\phi_2).$$

por lo tanto δ es lineal.

Además, si $\left\{\phi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_j \to \phi$ en el sentido $\mathcal{D}(\Omega)$, existe $K \Subset \Omega$ tal que $Sopp(\phi_j - \phi) \subset K$ para cada j y $\lim\limits_{j\to\infty} D^\alpha\phi_j(x) = D^\alpha\phi(x)$ uniformemente en K para cada multi-índice α. Por lo tanto

$$|\delta(\phi_j) - \delta(\phi)| = |\phi_j(0) - \phi(0)| \to 0, \text{cuando} j \to \infty$$

En consecuencia, $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Veamos que $\delta_{(0)}$ es una distribución que no satisface (1.1). En efecto, supongamos que $\delta_{(0)}$ satisface (1.1), entonces existe una función $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ de manera que:

$$\phi(0) = \int_\Omega u(x)\,\phi(x)\,dx \ \ , \ \ \text{para todo} \ \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.2}$$

Consideremos la función de prueba definida por:

$$\phi_a(x) = \begin{cases} e^{\frac{a^2}{\|x\|^2 - a^2}}, & \text{si} \quad \|x\| < a \\ 0, & \text{si} \quad \|x\| > a \end{cases}$$

con $a > 0$, notemos que

$$\phi_a(0) = e^{-1} > 0 \tag{1.3}$$

$$|\phi_a(x)| \leq e^{-1} \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,\phi_a(x)\,dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\
&= \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,|\phi_a(x)|\,dx \\
&\leq \int_{\|x\|<a} |u(x)|\,e^{-1}\,dx \\
&= e^{-1}\int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx.
\end{aligned}
$$

Si u es localmente integrable entonces $\lim\limits_{a\to 0}\displaystyle\int_{\|x\|<a} |u(x)|\,dx = 0$ se sigue entonces que

$$\lim_{a\to 0}\int_{\Omega} |u(x)|\,\phi_a(x)\,dx = 0,$$

lo cual contradice (1.2)

1.3.1. Derivada de una distribución

Definición 1.30 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ una distribución. Dado un multi-índice α definimos la $\alpha-$ésima derivada de T como*

$$(D^{\alpha}T)\,(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi), \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observación. $D^{\alpha}T$ es una distribución, para toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Ejemplo.

1. Si $0 \in \Omega$ y $\delta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es la distribución de Dirac entonces, $D^{\alpha}\delta$ viene dada por:

$$D^{\alpha}\delta(\phi) = (-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(0).$$

2. Si $\Omega = \mathbb{R}$ y $H \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la función definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

hallemos H' en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Sea $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con soporte compacto en $[-a, a]$ entonces

$$\begin{aligned}(T_H)'\phi &= (-1)^{|1|} T_H(\phi') \\ &= -T_H(\phi') \\ &= -\int_{\mathbb{R}} H(x)\,\phi'(x)\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\int_{-a}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-a}^{0} H(x)\,\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} H(x)\,\phi'(x)\,dx \\ &= -\int_{0}^{a} \phi'(x)\,dx \\ &= -\phi(x)\Big|_0^a \\ &= -(\phi(a) - \phi(0)) \\ &= \phi(0) = \delta(\phi).\end{aligned}$$

Por lo tanto $(T_H)'$ es la distribución de Dirac por lo que $(T_H)'$ es una distribución.

Definición 1.31 *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y α un multi-índice. Si existe una función $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ de tal manera que*

$$T_{v_\alpha}(\phi) = D^\alpha T_u(\phi) \quad \textit{para todo} \quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces v_α es llamada la $\alpha-$ésima derivada (distribucional) débil de T_u.

1.4. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev constituyen una herramienta matemática importante en el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales, el análisis, Física matemática, geometría diferencial y otros campos de las ciencias e ingeniería.

A continuación introducimos los espacios de Sobolev de orden entero y establecemos algunas de sus más importantes propiedades.

Definición 1.32 *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto , $1 \leq p \leq \infty$ y m un entero no negativo. El conjunto*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)/D^\alpha u \in L^p(\Omega), |u| \leq m\}$$

*es llamado **Espacios de Sobolev sobre** Ω. Dotado del funcional*

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ si\ 1 \leq p < \infty. \tag{1.5}$$

resulta ser un un espacio normado.

Es evidente que $\|u\|_{m,p} \geq 0$, además si $\|u\|_{m,p} = 0$ implica que $\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$, y en consecuencia $\|D^\alpha u\|_p^p = 0$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq m$. En particular para $\alpha = 0$ se tiene que

$$\|D^\alpha u\|_p^p = \|D^0 u\|_p^p = \|u\|_p^p = 0,$$

de lo cual se obtiene $u = 0$.

La homogeneidad del funcional se verifica, dado que la derivada y de la norma satisfacen dicha propiedad:

$$\begin{aligned}
\|\beta u\|_{m,p} &= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha (\beta u)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\beta D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |\beta|^p \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\beta| \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

y para finalizar, la desigualdad de Hölder, nos garantiza que el funcional satisface la desigualdad triangular:

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|_{m,p} &= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}(u+v)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}u + D^{\alpha}v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|D^{\alpha}v\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u\|_{m,p} + \|v\|_{m,p}
\end{aligned}
$$

Teorema 1.18 *$W^{m,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.- Ver [24 Pág. 57].

Observación:

(1) $W^{m,p}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $L^p(\Omega)$.

(2) Si $p = 2$ tenemos

$$W^{m,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega)/Du \in L^2(\Omega)\ ,\ |u| \le m \quad \forall m \right\} = H^m(\Omega)$$

es un espacio de Hilbert.

En este espacio introducimos la forma bilineal

$$
\begin{aligned}
(u,v)_{H^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\le m} (D^{\alpha}u, D^{\alpha}v)_{L^2(\Omega)} \\
&= \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u.D^{\alpha}v dx
\end{aligned}
$$

que resulta ser un producto interno inducido por la norma

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = (u,u)^{1/2} = \left(\sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^2 dx \right)^{1/2}$$

(3) Si $m = 1$ tenemos

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)/Du \in L^2(\Omega)\ ,\ |u| \leq 2\right\}$$
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \ .$$

Proposición 1.8 *Sea α un multi-índice, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p(\Omega)$ y $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ y $D^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$. Entonces $v_\alpha = D^\alpha u$.*

Demostración.- Ver [24 Pág. 27].

Teorema 1.19 *Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío, $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Se tiene*

(a) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio reflexivo si $p \in (1, \infty)$.

(b) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1, \infty)$.

Demostración.- Ver [1 Pág. 121].

Observación. Los espacios $W^{k,1}(\Omega)$ y $W^{k,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos.

Definición 1.33 *Sea $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty)$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}.$$

En el caso particular en que p=2, es usual usar la notación $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.

Observación.

1. $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ si y solo si existe una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$, esto es: existe $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, tal que $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$.

2. Utilizando la convolución con una sucesión regularizaste, podemos comprobar que $C_0^k(\Omega) \subseteq W_0^{k,p}(\Omega)$, para todo $k \geq 1$, $p \in [1, \infty)$.

Teorema 1.20 (Desigualdad de Poincaré) *Sea Ω abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ de frontera Γ bien regular, entonces existe $C_* > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \|u\|_p &\leq C_* \left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_p^p dx\right)^{1/p} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)\ ;\ 1 < p < \infty \\ &= \|\nabla u\|_p \end{aligned}$$

Si $p = 2$ *entonces* $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ *por teorema de Poincare*

$$\|u\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración.- Ver [4 Pág. 134].

Observación. $\exists C_0, C_1 > 0$ tal que

$$C_0 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad , \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Asociado a esta norma tenemos el producto interno

$$((u, v))_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

Proposición 1.9 ***(Desigualdad de Hardy-Sobolev)***
Si $u \in H_0^1(\Omega)$, *entonces* $\dfrac{u}{\varphi_1} \in L^q(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1-r}{N}$, $0 < r \leq 1$, *y entonces existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$\left\| \frac{u}{\varphi_1^r} \right\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Demostración.- Ver [8 Pág. 2].

Proposición 1.10 *Sea* Ω *un conjunto abierto de* $\mathbb{R}^n$, *de clase* C^1, *con frontera acotada. sean* $m \geq 1$ *un entero y* $1 \leq p < \infty$. *Entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} > 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} = 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\ \forall q \in [p, +\infty[$,

Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{N} < 0$, *entonces* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$

Demostración.- Ver [15 Pag. 168].

Teorema 1.21 (Inmersión Compacta)
Sea Ω *abierto acotado de* $\mathbb{R}^n$ *bien regular* $j \geq 0, m \geq 1 \quad , \quad 1 \leq p < +\infty$ *entonces*

(i) *si* $m < \dfrac{n}{p} \quad \Rightarrow \quad W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \dfrac{np}{n - mp}$

(ii) *si* $m = \dfrac{n}{p} \quad \Rightarrow \quad W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega) \quad 1 \leq q < \infty$

(iii) *si* $m > \dfrac{n}{p} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a) \quad W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j,q}(\Omega) \ \ ; \ 1 \leq q < \infty \\ b) \quad W^{j+m,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} W^{j}(\overline{\Omega}) \end{cases}$

Demostración.- Ver [12 Pag. 102].

En particular, se tiene las siguientes dos proposiciones:

Proposición 1.11 *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1, con frontera acotada. Sean $1 \leq p \leq \infty$, entonces tenemos las siguientes inmersiones continuas:*

Si $1 \leq p < N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $p = N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$,

Si $p > N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$

Demostración.- Ver [4 Pag. 168].

Proposición 1.12 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Sea Ω un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, de clase C^1. Entonces tenemos las siguientes inmersiones compactas:*

Si $p < N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ *donde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

Si $p = N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$

Si $p > N$, *entonces* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$

Demostración.- Ver [24 Pag. 89].

Teorema 1.22 ***(Principio del máximo fuerte)***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $u \in C(\overline{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$ tal que $\Delta u \leq 0$ $\ (\Delta u \geq 0)$ en Ω y suponga que existe un punto $y \in \Omega$ tal que $u(y) = \sup_{\partial\Omega} u$, $\ (u(y) = \inf_{\partial\Omega} u)$. entonces u es constante.

Demostración.- Ver [17 Pag. 15].

Teorema 1.23 ***(Principio del máximo débil)***

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado y* $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *tal que* $\Delta u \leq 0$ $\;(\Delta u \geq 0)$ *en* Ω*, entonces .*

$\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$, $\;(\inf\limits_{\Omega} u = \inf\limits_{\partial\Omega} u)$.

Demostración.- Ver [20 Pag. 15].

Teorema 1.24 ***(Teorema de Green)***

Sea Ω *abierto acotado, bien regular, de frontera* $\Gamma = \partial\Omega$*. Entonces*

$$\int_{\Omega}(-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial v}.v d\Gamma \;\; ,\forall \;\; u \in H^2(\Omega), \;\; ,\forall \;\; v \in H^1(\Omega)$$

Demostración.- Ver [26 Pag. 102].

Teorema 1.25 ***(Teorema del ángulo agudo)***

Sea $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *una aplicación contínua, si existe* $R > 0$ *tal que* $\langle F(\xi), \xi\rangle \geq 0, \forall |\xi| = R$*, entonces existe* $\xi_0 \in \overline{B(0,R)}$ *tal que* $F(\xi_0) = 0$

Demostración.- Ver [21].

Capítulo 2

Existencia y unicidad de soluciones de un problema elíptico de Kirchhoff con término singular

2.1. Existencia de la Solución

Consideremos el problema elíptico de Kirchhoff

$$
(2)\quad \left\|\begin{array}{ll}
-M\left(\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u dx = \dfrac{h(x)}{u^\gamma} + k(x)u^\alpha & \text{en } \Omega \\
u > 0 & \text{en } \Omega \\
u = 0 & \text{en } \partial\Omega
\end{array}\right.
$$

donde Ω es un abierto, acotado, bien regular de $\mathbb{R}^n$, con frontera $\partial\Omega$, $M : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua satisfaciendo

(M1) existe m_o y $\theta_1 > 0$ tal que

$$M(t) \geq m_0 \quad \text{si} \quad t \geq \theta_1$$

(M2) $\theta_2 = \sup\{t > 0 \;\; ; \;\; M(t) \leq 0\} > 0$

(M3) $h, k \in C(\overline{\Omega})$, $h(x), k(x) \geq 0$ en Ω , $h, k \not\equiv 0$

Nuestro problema consiste en determinar la existencia de soluciones débiles de éste sistema; también investigaremos la unicidad de la solución, para
$M(s) = m_0 + bs\ ,\ s \in \mathbb{R}^+\ ,\ m_0 > 0\ ,\ b \geq 0.$

En adelante denotaremos

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}\ \ ,\ \forall u \in H_0^1(\Omega)\ \ ,\ \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|$$

Teorema 2.1.1 *Sea* $h, k : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas y positivas.* $\alpha, \gamma \in (0,1)$ *y* $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *una función continua, donde* $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty >$ *que satisface*

(M1) $\exists\ m_o > 0\ ,\ \theta_1 > 0$ *tal que* $M(t) \geq m_0 \quad si \quad t \geq \theta_1$

(M2) $\theta_2 = \sup\{t > 0 \quad ; \quad M(t) \leq 0\} > 0$

entonces el problema (2) *posee una solución positiva.*

Para demostrar el teorema (2.1.1) consideremos cuatro lemas.

Lema 2.1 *Para cada número fijo* $\varepsilon > 0$ *, el problema:*

$$\left| \begin{array}{lll} -M(\|u\|^2)\Delta u = \dfrac{h(x)}{(\varepsilon + u)^\gamma} + k(x)u^\alpha & en & \Omega \\ \qquad\quad u > 0 & en & \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & en & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

posee una solución u_ε

Demostración.- Para la demostración del Lema consideramos el siguiente problema:

$$\left| \begin{array}{lll} -M^+(\|u\|^2)\Delta u = \dfrac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} + k(x) \mid u \mid^\alpha & \text{en} & \Omega \\ \qquad\quad u > 0 & \text{en} & \Omega \\ \qquad\quad u = 0 & \text{en} & \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.2}$$

donde $M^+ : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es dado por

$$M^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \theta_2 \\ & \\ M(t) & \text{si} \quad t > \theta_2 \end{cases}$$

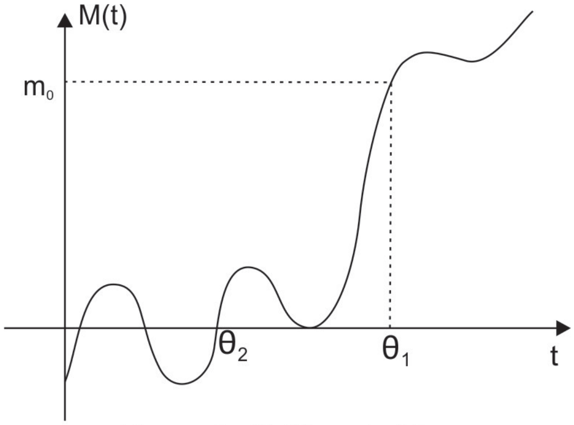

Figura 1: Gráfico de M .

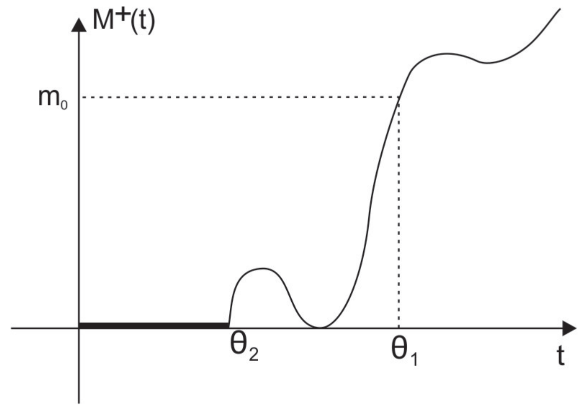

Figura 2: Gráfico de M^+ .

Primero motivaremos la construcción de la definición de solución débil de (2.2), de una manera formal.

Multiplicando la ecuación (2.2) con v suficientemente regular y luego integrando en Ω obtenemos:

$$-M^+(\|u\|^2)\int_\Omega \Delta u.v dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u(x)|)^\gamma} v(x)dx + \int_\Omega k(x) \mid u(x) \mid^\alpha v\, dx$$

$$M^+(\|u\|^2)\int_\Omega -\Delta u\, v dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} v dx + \int_\Omega k(x) \mid u \mid^\alpha v\, dx$$

Para $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y $v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, por teorema de Green se tiene

$$\int_\Omega -\Delta u\, v dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\Gamma \tag{2.3}$$

Utilizando (2.3) tenemos:

$$M^+(\|u\|^2)\left[\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma\right] = \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\Gamma} v dx + \int_\Omega k(x)|u(x)|^\alpha v\, dx$$

Como no conocemos v en la frontera $\partial\Omega = \Gamma$ entonces imponemos $v|_{\partial\Omega} = 0$

Luego tenemos

$$M^+(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} v dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha v\, dx \tag{2.4}$$

Lo que permite dar la siguiente definición.

Definición 2.1 *Decimos que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ es solución débil de (2.2) si*

i) $u \in H_0^1(\Omega)$

ii) $M^+(\|u\|^2)\displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma} v dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha v\, dx\ ,\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$

Veamos que esta definición es consistente, esto es

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx \quad , \quad \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma} v dx \quad , \quad \int_\Omega k(x)|u|^\alpha v(x) dx \ \text{ son finitos}$$

(a) $\displaystyle\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$ es finito, pues

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx\right| &\leq \int_\Omega |\nabla u|\,|\nabla v|\, dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\right)^{1/2} \quad \text{por desigualdad de Holder} \\
&= \|\nabla u\|_{L^2}\,\|\nabla v\|_{L^2} \\
&= \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty
\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma} v dx$ es finito, pues

$$\|h\|_\infty = \sup\left\{h(x)/x \in \overline{\Omega}\right\}$$

$$\varepsilon \leq |u(x)| + \varepsilon \Leftrightarrow (\varepsilon)^\gamma \leq (|u(x)|+\varepsilon)^\gamma$$

Ahora

$$\frac{1}{(|u(x)|+\varepsilon)^\gamma} \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma}$$

$$\text{entonces } \frac{|\ v(x)\ |}{|u(x)|+\varepsilon} \leq \frac{|\ v(x)\ |}{\varepsilon^\gamma}\ ;\ \text{para } v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\begin{aligned}
\text{luego } \left|\int_\Omega \frac{h(x).v(x)}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma}\right| &\leq \int_\Omega \frac{h(x)\ |\ v(x)\ |}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} dx \\
&\leq \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{|\ v(x)\ |}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} dx \\
&\leq \|h\|_\infty \int_\Omega \frac{|\ v(x)\ |}{\varepsilon^\gamma} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\|h\|_\infty}{\varepsilon^\gamma}\int_\Omega |\, v(x)\,|\, dx \\
&= C_\varepsilon \int_\Omega |\, v(x)\,|\, dx \quad ; \quad C_\varepsilon = \frac{\|h\|_\infty}{\varepsilon^\gamma} \\
&= C_\varepsilon \int_\Omega 1.\,|\, v(x)\,|\, dx \quad ; \quad \text{por desigualdad de Holder} \\
&\leq C_\varepsilon \left(\int_\Omega 1^2\, dx\right)^{1/2} . \left(\int_\Omega |\, v\,|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&= C_\varepsilon\, (m(\Omega)\,)^{1/2}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C_\varepsilon C_1\, (m(\Omega)\,)^{1/2}\, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&= C\, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty\ ,\ \text{pues}\ \ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)\ ,\ C = C_\varepsilon C_1\, (m(\Omega)\,)^{1/2}
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\left|\int_\Omega \frac{h(x).v(x)}{(\varepsilon + |u(x)|)^\gamma} dx\right| \leq C\, \|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty
$$

(c) $\displaystyle\int_\Omega k(x)\ |u(x)|^\alpha\ v(x)dx$ es finito.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
\left|\int_\Omega k(x)\ |u(x)|^\alpha\ v(x)dx\right| &\leq \int_\Omega |k(x)|\ |u|^\alpha\ |v|\ dx \\
&\leq \|k\|_\infty \int_\Omega |u|^\alpha\, |v|\ dx \\
&\leq \|k\|_\infty \int_\Omega |u|\, |v|\ dx \ \ \text{pues}\ \ 0 < \alpha < 1\ ,\ |u|^\alpha \leq |u| \\
&\leq \|k\|_\infty \left(\int_\Omega |\, u\,|^2\ dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\, v\,|^2\right)^{1/2} \ \ \text{por desigualdad de Holder} \\
&\leq \|k\|_\infty\, \|u\|_{L^2(\Omega)} . \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|k\|_\infty\, C\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} . \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \ \ \text{pues}\ \ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)
\end{aligned}
$$

así tenemos que

$$\left|\int_{\Omega} k(x)\ |u(x)|^{\alpha}\ v(x)dx\right| \ \leq\ C^{*}\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\,.\,\|v\|_{H_0^1(\Omega)} < \infty \text{ donde } \ C^{*} = \|k\|_{\infty}\,C$$

□

Continuemos con la prueba del Lema 2.1.

Para probar la existencia de solución débil de (2.3) emplearemos el Método de Galerkin.

Como $H_0^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert separable entonces tiene una base Hilbertiana $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ tal que

(i) $(\psi_i, \psi_j) = 0\ ;\ i \neq j$

(ii) $\left\|\psi_i\right\| = 1$

Denotamos para cada $m \in \mathbb{N}$

$V_m = gen\{\psi_1, \psi_2, \psi_3, ..., \psi_m\} \equiv [\psi_1, \psi_2, \psi_3, ..., \psi_m] \subseteq H_0^1(\Omega)$

Sea $u \in V_m\ ;\ u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j\psi_j$

Definamos

$$\begin{array}{rcl} \Phi : V_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ u & \longmapsto & \Phi(u) = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \end{array}$$

Resulta que Φ es un isomorfismo isométrico, ya que:

(i) Φ es una transformación lineal, suryectiva.

(ii) $\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|\xi\|_{\mathbb{R}^m}$ donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$

Probemos cada caso.

(i) Sea $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j\psi_j \quad , \quad v = \sum_{j=1}^{n} \eta_j\psi_j$

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha u + \beta v) &= \Phi\left(\alpha\sum_{j=1}^{m} \xi_j\psi_j + \beta\sum_{j=1}^{n} \eta_j\psi_j\right) = \Phi\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha\xi_j + \beta\eta_j\right)\psi_j\right) \\
&= (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_2 + \beta\eta_2, ..., \alpha\xi_m + \beta\eta_m) \\
&= (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, ..., \alpha\xi_m) + (\beta\eta_1, \beta\eta_2, ..., \beta\eta_m) \\
&= \alpha\,(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) + \beta\,(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_m) \\
&= \alpha\Phi\,(u) + \beta\Phi\,(v)
\end{aligned}$$

Además para $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m) \in \mathbb{R}^m$, $\exists u = \sum_{i=1}^{m} \xi_j w_j \in V_m$: $\Phi(u) = \xi$.

(ii) Sea $u \in V_m$

$$
\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx = (u,u) = \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \psi_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \psi_j \right)_{H^1_0(\Omega)} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left(\psi_i, \sum_{j=1}^{m} \xi_j \psi_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left[\sum_{j=1}^{m} \xi_j \left(\psi_i, \psi_j \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left[\xi_1 (\psi_i, \psi_1) + \xi_2 (\psi_i, \psi_2) + ... + \xi_i (\psi_i, \psi_i) + ... + \xi_m (\psi_i, \psi_m) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \xi_i . \xi_i = \sum_{i=1}^{m} \mid \xi_i \mid^2 = \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m} \ , \text{ donde } , \ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)
\end{aligned}
$$

entonces tenemos , $\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \|\xi\|^2_{\mathbb{R}^m}$,

De (i) y (ii) Φ es un isomorfismo isométrico.

Así identificamos $u \equiv \xi$.

Nuestro objetivo es encontrar $u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \psi_j \in V_m$ que verifique el sistema aproximado:

$$
(S.A) \ \ M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u . \nabla \psi_j dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha . \psi_j(x) dx \quad \forall j = 1, 2, ..., m
$$

Explicitamente

$$
\begin{cases}
M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u . \nabla \psi_1(x) dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_1(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha . \psi_1(x) dx \\
M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u . \nabla \psi_2(x) dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_2(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha . \psi_2(x) dx \\
\vdots \\
M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u . \nabla \psi_m(x) dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_m(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha . \psi_m(x) dx
\end{cases}
$$

Para encontrar una solución de (S.A) usaremos el teorema del ángulo agudo.

Sea $F : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(\xi) = (F_1(\xi), F_2(\xi, F_3(\xi)), ..., F_m(\xi))$$

donde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$

Definimos

$$F_j(\xi) = M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u.\nabla\psi_j dx - \int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha.\psi_j(x)dx \ ; \ \forall j = 1, 2, ..., m$$

Luego

$$\begin{aligned}
\langle F(\xi), \xi\rangle_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{j=1}^m F_j(\xi)\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left(M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u.\nabla\psi_j dx - \int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha.\psi_j(x)dx \right) \xi_j \\
&= \sum_{j=1}^m \xi_j \left[M^+(\|u\|^2) \right] \int_\Omega \nabla u.\nabla\psi_j dx - \sum_{j=1}^m \int_\Omega \frac{h(x)\xi_j\psi_j(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx \\
&\quad - \sum_{j=1}^m \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \xi_j\psi_j(x)dx \\
&= M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u.\nabla \left(\sum_{j=1}^m \xi_j\psi_j \right) dx - \int_\Omega \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} \sum_{j=1}^m \xi_j\psi_j dx \\
&\quad - \int_\Omega k(x)|u(x)|^\alpha \sum_{j=1}^m \xi_j\psi_j dx \\
&= M^+(\|u\|^2) \int_\Omega \nabla u \nabla u dx - \int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx - \int_\Omega k(x)|u(x)|^\alpha u dx \\
&= M^+(\|u\|^2) \, \|u\|^2 - \int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx - \int_\Omega k(x)|u(x)|^\alpha \, u \, dx
\end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\langle F(\xi), \xi\rangle = M^+(\|u\|^2) \, \|u\|^2 - \int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \, u \, dx \tag{2.5}$$

Con la finalidad de conseguir $\langle F(\xi), \xi\rangle \geq 0$, hacemos estimaciones para cada uno de los términos a la derecha de (2.5).

Probemos que:

(a) $\displaystyle\int_\Omega \frac{h(x)u}{(\varepsilon+|u|)^\gamma} \leq ||h||_\infty \int_\Omega \frac{|u|}{\varepsilon^\gamma} \leq C_\xi\, ||u||$

(b) $\displaystyle\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\, u\, dx \leq ||k||_\infty \int_\Omega |u|^{\alpha+1} \leq C\, ||u||^{\alpha+1}$.

En efecto:

(a)
$$\varepsilon \leq \varepsilon + |u(x)|$$

entonces
$$(\varepsilon)^\gamma \leq (\varepsilon + |u(x)|)^\gamma$$

así
$$\frac{1}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} \leq \frac{1}{\varepsilon^\gamma}$$

como $u(x) \leq |u(x)|$

entonces
$$\frac{u(x)}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} \leq \frac{|u(x)|}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} \leq \frac{|u(x)|}{\varepsilon^\gamma}$$

luego
$$\frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma} \leq \frac{h(x)|u(x)|}{\varepsilon^\gamma} \quad \text{pues} \quad h(x) \geq 0$$

integrando
$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx &\leq \int_\Omega \frac{h(x)|u(x)|}{\varepsilon^\gamma}dx\\ &\leq \frac{||h||_\infty}{\varepsilon^\gamma}\int_\Omega |u(x)|dx\end{aligned}$$

entonces
$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx &\leq ||h||_\infty \int_\Omega \frac{|u(x)|}{\varepsilon^\gamma}dx\\ &\leq \frac{||h||_\infty}{\varepsilon^\gamma}\int_\Omega |u(x)|dx\\ &= \frac{||h||_\infty}{\varepsilon^\gamma}\,||u||_{L^1(\Omega)}\\ &\leq \frac{C\,||h||_\infty}{\varepsilon^\gamma}\,||u||_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{pues} \quad H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)\end{aligned}$$

Así tenemos $\displaystyle\int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx \leq C_\varepsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$, donde $C_\varepsilon = \dfrac{C\ \|h\|_\infty}{\varepsilon^\gamma}$. y

$$-\int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx \geq -C_\varepsilon \|u\| \ . \tag{2.6}$$

(b) Probaremos ahora que

$$\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\, u\, dx \leq C\,\|u\|^{\alpha+1}$$

En efecto

$$\begin{aligned}
u(x) \leq |u(x)| \Leftrightarrow u(x)|u(x)|^\alpha &\leq |u(x)|^{\alpha+1} \\
k(x)u(x)|u(x)|^\alpha &\leq k(x)|u(x)|^{\alpha+1} \quad \text{pues} \quad k(x)\geq 0
\end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k(x)u(x)|u(x)|^\alpha dx &\leq \int_\Omega k(x)|u(x)|^{\alpha+1}dx \\
&\leq \|k\|_\infty \int_\Omega |u(x)|^{\alpha+1}dx \\
&= \|k\|_\infty\, \|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)}
\end{aligned}$$

como $0<\alpha<1 \Rightarrow 1<\alpha+1<2$

entonces $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$

entonces existe $C_1>0$ tal que $\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \leq C_1\,\|u\|^{\alpha+1}_{H_0^1(\Omega)}$ y

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k(x)u(x)|u(x)|^\alpha dx &\leq \|k\|_\infty\, \|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \\
&\leq C_1\,\|k\|_\infty\,\|u\|^{\alpha+1} \\
&\leq C\,\|u\|^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

Así tenemos, que

$$\int_\Omega k(x)u(x)|u(x)|^\alpha dx \leq C\,\|u\|^{\alpha+1} \ ; \ C = C_1\,\|k\|_\infty \quad , \quad \text{y}$$

$$-\int_\Omega k(x)u(x)|u(x)|^\alpha dx \geq -C\,\|u\|^{\alpha+1} \tag{2.7}$$

Observamos que C_ε, C son constantes que no dependen de u ni de m

Sea $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|u\|$

$$\begin{aligned}\langle F(\xi), \xi\rangle &= M^+(\|u\|^2)\,\|u\|^2 - \int_\Omega \frac{h(x)u(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma}dx - \int_\Omega k(x)|u|^\alpha u(x)dx \\ &\geq M^+(\|u\|^2)\,\|u\|^2 - C_\varepsilon\,\|u\| - C\,\|u\|^{\alpha+1} \text{ por las desigualdades (2.6) y (2.7)}\end{aligned}$$

Como :

$$M^+(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq \theta_2 \\ \\ M(t) & \text{si} \quad t \geq \theta_2 \end{cases}$$

Si tomamos $\|u\|^2 \geq \theta_1$ entonces $M^+(\|u\|^2) = M(\|u\|^2) \geq m_0$

entonces

$$\begin{aligned}\langle F(\xi), \xi\rangle &\geq M^+(\|u\|^2)\,\|u\|^2 - C_\varepsilon\,\|u\| - C\,\|u\|^{\alpha+1} \\ &\geq m_0\,\|u\|^2 - C_\varepsilon\,\|u\| - C\,\|u\|^{\alpha+1}\end{aligned}$$

Si consideramos $\|u\| = |\xi| = r$; pues $V_m \approx \mathbb{R}^m$, donde r es suficientemente grande entonces

$$\langle F(\xi), \xi\rangle \geq m_0 r^2 - C_\varepsilon r - C r^{\alpha+1}, \quad \forall\ |\xi| = r$$

Sea $p(r) = r^2 m_0 - C_\varepsilon r - C r^{\alpha+1}$, donde $r > 0$; $r = |u|^2 \geq \theta_1$
queremos que $r^2 m_0 - C_\varepsilon r - C r^{\alpha+1} \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad r[\, r m_0 - C_\varepsilon - C\, r^\alpha\,] \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad r m_0 - C\, r^\alpha \geq C_\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \quad m_0 - C\, r^{\alpha-1} \geq \frac{C_\varepsilon}{r} > 0 \text{ pues } C_\varepsilon > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad m_0 > \frac{C}{r^{1-\alpha}} \\
&\Leftrightarrow \quad r > \left(\frac{C}{m_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad , \quad 0 < 1 - \alpha < 1
\end{aligned}$$

para $r_\varepsilon = \left(\frac{C}{m_0} + 1\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{C}{m_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

Así tenemos que $\langle F(\xi),\xi\rangle \geq 0$ para $|\xi| = r_\varepsilon$, donde $r_\varepsilon > \max\left\{\theta_1, \left(\frac{C}{m_0}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}$

Luego por el teorema del ángulo agudo tenemos que existe $\varepsilon_0^m \in \overline{B_r(0)}$; $F(\varepsilon_0^m) = 0$

Como $V_m \approx \mathbb{R}^m \Rightarrow \varepsilon_0^m \equiv u_m \in V_m$; $\left\|\varepsilon_0^m\right\| = \|u_m\| \leq r_\varepsilon$, donde r_ε no depende de m

Entonces $F(u_m) = \theta \Rightarrow F_j(u_m) = 0$ para $j = 1, 2, 3, ..., m$.
Por lo que (S.A) admite una solución.

Observación: En (S.A) podemos reemplazar ψ_j, por $\psi \in V_m$.

En efecto

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla\psi_j(x)dx - \int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx - \int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha.\psi_j(x)dx = 0$$

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla\psi_j(x)dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha.\psi_j(x)dx \tag{2.8}$$

Aplicando sumatoria a (2.8) tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \eta_j M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla\psi_j(x)dx &= \sum_{j=1}^m \eta_j\int_\Omega \frac{h(x)\psi_j(x)}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx \\ &+ \sum_{j=1}^m \eta_j\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha.\psi_j(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla(\sum_{j=1}^m \eta_j\psi_j(x))dx &= \sum_{j=1}^m \eta_j\int_\Omega \frac{h(x)(\sum_{j=1}^m \eta_j\psi_j(x))}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx \\ &+ \sum_{j=1}^m \eta_j\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha.(\sum_{j=1}^m \eta_j\psi_j(x))dx\end{aligned}$$

$$M^+(\|u_m\|^2)\int_\Omega \nabla u_m.\nabla\psi(x)dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha.\psi(x)dx \tag{2.9}$$

donde $\psi = \sum_{j=1}^m \eta_j\psi_j(x) \in V_m$.

2.2. Pasaje al límite

En adelante consideraremos la base Hilbertina $\{\psi_\nu\}_{\nu\geq 1}$ de $H_0^1(\Omega)$, constituido por los autovalores del problema

$$\left| \begin{array}{rll} -\Delta u & = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u & = 0 & \text{en } \Gamma \end{array} \right.$$

Elegimos $\ell \leq m$, luego $V_\ell \subset V_m$, pues

$$\text{si } u \in V_\ell \quad \Rightarrow \quad u = \sum_{j=1}^{\ell} \eta_j \psi_j + 0\psi_{j+1} + \ldots + 0\psi_m \in V_m.$$

En la expresión (2.9) hacemos el pasaje al límite.

Como $\|u_m\| \leq r_\varepsilon$ entonces $(\|u_m\|)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada de números reales, entonces tiene una subsucesión convergente $\left\|u_{m_k}\right\|$ que aún la denotamos con $\|u_m\|$. luego

Sea $\|u_m\| \longrightarrow t_1 \quad \Rightarrow \quad \|u_m\|^2 \longrightarrow t_0$.

Como $u_m \in V_m \subset H_0^1(\Omega) \Rightarrow (u_m)_{m\geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$. Además ya se vio que $\|u_m\| \leq r_\varepsilon$

Como $H_0^1(\Omega)$ es reflexivo, entonces por teorema Alaugla-Bourbaki posee una subsucesión $(u_{m_k}) \subset H_0^1(\Omega)$ de $(u_n)_{n\geq 1}$, que aún denotaremos con $(u_m)_{m\geq 1}$ tal que

$$u_m \rightharpoonup u \;\; \text{en} \;\; H_0^1(\Omega), \tag{2.10}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Como} \;\; H_0^1(\Omega) & \overset{c}{\hookrightarrow} & L^2(\Omega) \quad \text{(inmersión compacta)} \\ \text{entonces} \;\; u_m & \longrightarrow & u \;\; \text{en} \;\; L^2(\Omega) \\ \Rightarrow \quad u_m(x) & \longrightarrow & u(x) \;\; \text{c.s} \quad \text{en } \Omega \end{array}$$

$$\text{Por otro lado} \quad \|u_m\|^2 \longrightarrow t_0 \quad \text{en } \mathbb{R} \tag{2.11}$$

$$\text{entonces} \;\; M^+(\|u_m\|^2) \longrightarrow M^+(t_0) \quad \text{pues } M^+ \;\; \text{es continua.} \tag{2.12}$$

Veamos las convergencias en cada uno de los términos de (2.9)

- $\displaystyle\int_{\Omega} \nabla u_m.\nabla\psi dx \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u.\nabla\psi dx \quad m \longrightarrow +\infty \ \forall\psi \in V_{\ell}.$

En efecto, de (2.11)

$$(u_m, \psi)_{H_0^1} \longrightarrow (u, \psi)_{H_0^1} \quad , \quad \forall \ \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Pero $(u, \psi)_{H_0^1} = \displaystyle\int_{\Omega} \nabla u.\nabla\psi dx$ es un producto interno en $H_0^1(\Omega)$ equivalente al producto interno natural de $H^1(\Omega)$. Luego

$$\int_{\Omega} \nabla u_m.\nabla\psi dx \longrightarrow \int_{\Omega} \nabla u.\nabla\psi dx \quad \forall \ \psi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.13}$$

- $\displaystyle\int_{\Omega} \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon + |u_m(x)|)^{\gamma}} dx \longrightarrow \int_{\Omega} \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon + |u(x)|)^{\gamma}} dx \quad , \quad \forall \ \psi \in V_{\ell}$

En efecto, como $u_m(x) \longrightarrow u(x)$ c.s. en Ω

entonces $\big|\, |u_m(x)| - |u(x)| \,\big| \leq |u_m(x) - u(x)| \longrightarrow 0$ c.s. en Ω
$m \longrightarrow +\infty$

entonces $|u_m(x)| \longrightarrow |u(x)|$ c.s. en Ω

$\Rightarrow \ \varepsilon + |u_m(x)| \longrightarrow \varepsilon + |u(x)|$ c.s. en Ω

$\Rightarrow \ (\varepsilon + |u_m(x)|)^{\gamma} \longrightarrow (\varepsilon + |u(x)|)^{\gamma}$ c.s. en Ω

$\Rightarrow \ \dfrac{1}{(\varepsilon + |u_m(x)|)^{\gamma}} \longrightarrow \dfrac{1}{(\varepsilon + |u(x)|)^{\gamma}}$ c.s. en Ω

$\Rightarrow \ \dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon + |u_m(x)|)^{\gamma}} \longrightarrow \dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon + |u(x)|)^{\gamma}}$ c.s. en Ω

Además $\dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon + |u_m(x)|)^{\gamma}}$ es integrable

Pues

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}dx\right| &\leq \int_\Omega \frac{|h(x)||\psi(x)|}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}dx \\
&\leq \|h(x)\|_\infty \int_\Omega \frac{|\psi(x)|}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}dx \\
&\leq \|h(x)\|_\infty \int_\Omega \frac{|\psi(x)|}{\varepsilon^\gamma}dx \\
&\leq \frac{\|h(x)\|_\infty}{\varepsilon^\gamma}\int_\Omega |\psi(x)|dx \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon^\gamma}\int_\Omega |\psi(x)|dx \\
&= \frac{C}{\varepsilon^\gamma}\left\|\psi\right\|_{L^1} \leq \frac{C_1 C}{\varepsilon^\gamma}\left\|\psi\right\|_{L^2} \\
&= k\left\|\psi\right\|_{H_0^1}(\Omega) < \infty, \ \text{ ya que } \ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Luego $\dfrac{h\psi}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}$ es integrable; además

$$\left|\frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^\gamma}|\psi(x)| \text{ c.s. en } \Omega$$

También: $\dfrac{C}{\varepsilon^\gamma}\ \psi \in L^1(\Omega)$, pues :

como $\psi \in V_\ell \quad \Rightarrow \quad \dfrac{C}{\varepsilon^\gamma}\ \psi \in V_\ell \subset H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

entonces $\dfrac{C}{\varepsilon^\gamma}\ \psi \in L^1(\Omega)$

Resumiendo tenemos

(i) $\dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}$ es integrable

(ii) $\dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma} \longrightarrow \dfrac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u(x)|)^\gamma}$ c.t.p. $x \in \Omega$

(iii) Existe $\dfrac{C}{\varepsilon^\gamma}\ \psi \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^\gamma}\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^\gamma}\ |\psi(x)| \quad ; \quad m \in \mathbb{N}$$

Luego por el teorema de la convergencia dominada $\dfrac{h\psi}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}}$ es integrable y

$$\int \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u_m(x)|)^{\gamma}}dx \longrightarrow \int \frac{h(x)\psi(x)}{(\varepsilon+|u(x)|)^{\gamma}}dx \quad ; \quad \forall \psi \in V_{\ell}\ . \tag{2.14}$$

- $$\int_{\Omega} k(x)|u_m|^{\alpha}\psi dx \longrightarrow \int_{\Omega} k(x)|u|^{\alpha}\psi dx \quad ; \quad \forall \psi \in V_{\ell},$$

En efecto, tenemos que $u_m \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$. Como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$; $1 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$ entonces $u_m \to u$ en $L^1(\Omega)$.

Ahora definimos

$$\begin{aligned} \varphi :\ \ L^1(\Omega) &\longrightarrow\ \ L^{1/\alpha}(\Omega) \\ |u| &\longmapsto\ \ |u|^{\alpha} \end{aligned}$$

Evidentemente φ está bien definidas, pues

$$\int_{\Omega} \left|\varphi(u)\right|^{1/\alpha} dx = \int_{\Omega} (|u|^{\alpha})^{1/\alpha}\, dx = \int_{\Omega} |u|\, dx = |u|_{L^1(\Omega)} < \infty$$

Además, como

$$\left|x^{\alpha} - y^{\alpha}\right| \leq c\left|x-y\right|^{\alpha} \quad , \quad \forall \alpha > 0 \quad , \quad \forall x, y \geq 0$$

haciendo $x = |u|$, $y = |v|$, resulta

$$\int_{\Omega} \left|\ |u|^{\alpha} - |v|^{\alpha}\ \right|^{1/\alpha} dx \leq c \int_{\Omega} (|\ |u|-|v|\ |^{\alpha})^{1/\alpha} dx \leq \int_{\Omega} |\ |u|-|v|\ |\, dx \longrightarrow 0$$

si $|u| \longrightarrow |v|$ en $L^1(\Omega)$

Es decir:

$$|u| \longrightarrow |v| \ \text{ en } \ L^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(|u|) \longrightarrow \varphi(|u|) \ \text{ en } \ L^{1/\alpha}(\Omega)$$

por lo que φ es continua.

Así, si $|u_n| \longrightarrow |u|$ en $L^1(\Omega)$ entonces $|u_n|^{\alpha} \longrightarrow |u|^{\alpha}$ en $L^{1/\alpha}(\Omega)$, pero de la inmersión continua $L^{1/\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$ resulta

$$|u_n|^{\alpha} \longrightarrow |u|^{\alpha} \ \text{ en } \ L^1(\Omega)$$

Luego

$$\left|\int_\Omega h(x)|u_n|^\alpha\psi dx-\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi dx\right|\leq\int_\Omega|h(x)|\ \Big|\,|u_n|^\alpha-|u|^\alpha\ \Big||\psi|dx$$
$$\leq|h|_{L^\infty}\ \max_{x\in\Omega}\big|\psi\big|\int_\Omega\Big(\Big|\ |u_n|^\alpha-|u|^\alpha\ \Big|\Big)\longrightarrow 0$$

Así

$$\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha\psi dx\longrightarrow\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi(x)dx$$

De la igualdad (2.9) tenemos

$$M^+(\|u_n\|^2)\int_\Omega\nabla u_m\nabla\psi dx=\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx+\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha\psi dx\ ;\ \forall\psi\in V_\ell$$

Por los calculos anteriores tenemos

$$M^+(\|u_m\|)\longrightarrow t_0\tag{2.15}$$

$$\int_\Omega\nabla u_m\nabla\psi dx\longrightarrow\int_\Omega\nabla u\nabla\psi dx\quad;\quad m\longrightarrow+\infty\tag{2.16}$$

$$\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx\longrightarrow\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx\quad;\quad m\longrightarrow+\infty\tag{2.17}$$

$$\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha\psi dx\longrightarrow\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi dx\quad;\quad m\longrightarrow+\infty\tag{2.18}$$

Aplicamos límite a ambos lados de (2.9) y utilizando (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18) tenemos:

$$\begin{array}{cccc}M^+(\|u_m\|^2)\displaystyle\int_\Omega\nabla u_m\nabla\psi dx & = & \displaystyle\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u_m|)^\gamma}dx+\int_\Omega k(x)|u_m|^\alpha\psi dx & \\ \downarrow & & \downarrow \qquad\qquad\qquad \downarrow & m\longrightarrow+\infty\end{array}$$

$$M^+(t_0)\int_\Omega\nabla u\nabla\psi dx=\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx+\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi dx\ ;\ \forall\psi\in V_\ell\tag{2.19}$$

Luego (2.19) es válida para $\psi\in\bigcup_{\ell=1}^{\infty}V_\ell$. Como $\overline{\bigcup_{\ell=1}^{\infty}V_\ell}=H_0^1(\Omega)$, se obtiene por densidad y continuidad:

$$M^+(t_0)\int_\Omega\nabla u\nabla\psi dx=\int_\Omega\frac{h(x)\psi}{(\varepsilon+|u|)^\gamma}dx+\int_\Omega k(x)|u|^\alpha\psi dx\ ;\ \forall\psi\in H_0^1(\Omega)\ .\tag{2.20}$$

Si fuera $M^{+}(t_0) = 0$, resulta

$$\int_{\Omega}\left(\frac{h(x)}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}} + h(x)|u|^{\alpha}\right)\psi dx = 0\ ,\ \forall\psi \in H_0^1(\Omega)$$

Luego

$0 < h(x) = -h(x)|u|^{\alpha}(\varepsilon + |u|)^{\gamma} \leq 0$ c.s. en Ω lo que es una contradicción.

Así $M^{+}(t_0) > 0$, por lo que $t_0 > \theta_2$ y $M(t_0) = M^{+}(t_0)$

En (2.20) sustituimos $\psi = u$ y tenemos la igualdad

$$M(t_0)\int_{\Omega}\nabla u\nabla u dx = \int_{\Omega}\frac{h(x)u}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}}dx + \int_{\Omega}k(x)|u|^{\alpha}u dx$$

$$M(t_0)\,||u||^2 = \int_{\Omega}\frac{h(x)u}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}}dx + \int_{\Omega}k(x)|u|^{\alpha}dx \tag{2.21}$$

Por otro lado, en la ecuación (2.9) consideramos $\psi = u_m$, entonces tenemos la igualdad

$$M^{+}(||u_m||^2)\int_{\Omega}\nabla u_m\nabla u_m dx = \int_{\Omega}\frac{h(x)u_m}{(\varepsilon+|u_m|)^{\gamma}}dx + \int_{\Omega}k(x)|u_m|^{\alpha}u_m dx$$

Luego tenemos

$$M^{+}(||u_m||^2)\,||u_m|| = \int_{\Omega}\frac{h(x)u_m}{(\varepsilon+|u_m|)^{\gamma}}dx + \int_{\Omega}k(x)|u_m|^{\alpha}u_m dx \tag{2.22}$$

Aplicando límite a ambos lados de (2.22) y por (2.11) y (2.12)

Tenemos

$$\begin{array}{ccccccc} M^{+}(||u_m||^2) & ||u_m||^2 & = & \displaystyle\int_{\Omega}\frac{h(x)u_m}{(\varepsilon+|u_m|)^{\gamma}}dx & + & \displaystyle\int_{\Omega}k(x)|u_m|^{\alpha}u_m dx & \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & m\longrightarrow+\infty \\ M^{+}(t_0) & t_0 & = & \displaystyle\int_{\Omega}\frac{h(x)u}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}}dx & + & \displaystyle\int_{\Omega}k(x)|u|^{\alpha}u dx & \end{array}$$

$$M(t_0)\ t_0 = \int_{\Omega}\frac{h(x)u}{(\varepsilon+|u|)^{\gamma}}dx + \int_{\Omega}k(x)|u|^{\alpha}u dx \tag{2.23}$$

De (2.21) y (2.23) tenemos:

$M(t_0)\,\|u\|^2 = M(t_0).t_0$

$M(t_0)[\|u\|^2 - t_0] = 0$ como $M(t_0) > 0$, se tiene

$\|u\|^2 = t_0$ entonces $M(t_0) = M(\|u\|^2)$, que substituida en (2.20) da

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\varepsilon + |u|)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)|u|^\alpha \psi dx \quad , \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Lo que concluye la prueba del lema 2.1. □

Observación. Por el principio del máximo se tiene que $u(x) > 0$ c.s. en Ω.

En efecto, sea $\psi_1 > 0$ la autofunción de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ asociada al autovalor λ_1, tal que

$$m_0 > \lambda_1 M_\infty \psi_1(x) \quad , \quad \text{c.t.p.} \quad x \in \Omega$$

donde $M(\|u\|^2) \leq M_\infty$ (se sabe que $\|u\| \leq r$).

También, puede probarse que $\exists\ c > 0$:

$$\frac{h(x)}{(1+t)^\gamma} + k(x)t^\alpha \geq C\left[\frac{1}{(1+t)^\gamma} + t^\alpha\right] \geq m_0 > 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega \qquad \forall t \geq 0.$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
-M(\|u\|^2)\Delta u &= \frac{h(x)}{(\varepsilon + |u|)^\gamma} + k(x)u^\alpha \\
&\geq \frac{h(x)}{(1 + |u|)^\gamma} + k(x)u^\alpha \quad , \quad 0 < \varepsilon < 1 \\
&\geq C\left[\frac{1}{(1+|u|)^\gamma} + u^\alpha\right] \\
&\geq m_0 > \lambda_1 M_\infty \psi_1(x) = -\Delta(M_\infty \psi_1)
\end{aligned}$$

Por lo que tenemos

$$\left|\begin{aligned}
-\Delta(M(\|u\|^2)u) &\geq -\Delta(M_\infty \psi_1) \quad \text{en } \Omega \\
M(\|u\|^2)u &= 0 = M_\infty \psi_1 \quad \text{en } \Gamma
\end{aligned}\right.$$

Luego, del principio del máximo

$$M(\|u\|^2)u \geq M_\infty \psi_1 \qquad \text{en } \Omega$$

es decir

$$u(x) \geq \frac{M_\infty \psi_1(x)}{M(\|u\|^2)u} > 0 \ .$$

Luego $u > 0$ es solución del Lema 2.1:

$$(2.2) \begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \dfrac{h(x)}{(\varepsilon + u)^\gamma} + k(x)u^\alpha & \text{en} \quad \Omega \\ \qquad u > 0 & \qquad \Omega \\ \qquad u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \ . \end{cases}$$

Ahora probaremos que cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, el límite es la solución débil al problema (2). Observamos que la solución u del problema (2.2) depende de ε, entonces para cada $\varepsilon = \frac{1}{n}$ hay una solución $u_\varepsilon = u_{\frac{1}{n}} = u_n$ para $n \in \mathbb{N}$. □

Lema 2.2 *Existe $\delta > 0$ tal que $M(\|u_n\|^2) \geq \delta > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$*

Demostración.- Probaremos por el absurdo, supongamos que: $\forall \varepsilon > 0 : M(\|u_n\|^2) < \varepsilon$, luego

$$\lim_{x \to +\infty} M(\|u_n\|^2) = \lim_{n \to +\infty} \inf(M(\|u_n\|^2)) = 0 \tag{2.24}$$

por lo que $(\|u_n\|^2)_{n \geq 1}$ es acotada.

ya que si $\|u_n\| \longrightarrow +\infty \quad , \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 \leq n \Rightarrow \|u_n\|^2 \geq \theta_1$

y en consecuencia $M(\|u_n\|^2) \geq m_0$, lo que contradice (2.24)

Como $(\|u_n\|^2)$ es acotada en $\mathbb{R}$, existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow \theta_0$$

y de la reflexividad de $H_0^1(\Omega)$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

De la continuidad

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(\theta_0)$$

Luego

$$0 = \lim_{n \to \infty} \inf(M(\|u_n\|^2)) = \lim_{x \to \infty} M(\|u_n\|^2) = M(\theta_0)$$

Sea $\quad \dfrac{h(x)}{(1+t)^\gamma} + k(x)\, t^\alpha \geq C \left\{ \dfrac{1}{(1+t)^\gamma} + t^\alpha \right\} \geq m_0 > 0 \ , \ \text{para} \ t \geq 0 \ , \ x \in \overline{\Omega}$

Tomando $t = \|u_n\|$ tenemos

$$\frac{h(x)}{(1+\|u_n\|)^{\gamma}} + k(x)\,\|u_n\|^{\alpha} \geq m_0 > 0 \ \ , \ \ x \in \overline{\Omega}$$

$$-M(\|u_n\|^2)\Delta u_n \geq m_0 > 0 \ \text{ en } \ \Omega \tag{2.25}$$

Sea $\varphi > 0$, con $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$, entonces multipliquemos por φ la desigualdad (2.25) e integramos sobre Ω

$$\int_{\Omega} -M(\|u_n\|^2)\Delta u_n \varphi dx \geq \int_{\Omega} m_0 \varphi dx > 0$$

$$M(\left\|u_\eta\right\|^2)\int_{\Omega} -\Delta u_n \varphi dx \geq \int_{\Omega} m_0 \varphi dx > 0$$

Por la identidad de Green tenemos

$$M(\|u_n\|^2)\left[\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\Gamma\right] > m_0 \int_{\Omega} \varphi dx > 0$$

entonces

$$M(\|u_n\|^2)\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \varphi dx > m_0 \int_{\Omega} \varphi dx > 0 \ \text{ pues } \ \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

Tomando límite cuando $n \longrightarrow \infty$, procediendo como en la pagina 41, resulta:

$$0 \geq m_0 \int_{\Omega} \varphi dx > 0$$

lo que es una contradicción.

Entonces se tiene que $M(\|u_n\|^2) \geq \delta > 0$

□

Lema 2.3 ($\|u_n\|$) *es acotada.*

Demostración.- Para cada $\varepsilon = \frac{1}{n}$ entonces $u_\varepsilon = u_{\frac{1}{n}} = u_n$ es una solución debíl de (2.1) por el Lema 2.1, entonces satisface

$$M(\|u_n\|^2)\int_{\Omega} \nabla u_n \nabla \psi dx = \int_{\Omega} \frac{h(x)\psi}{(\frac{1}{n} + u_n)^{\gamma}} dx + \int_{\Omega} k(x)(u_n)^{\alpha} \psi dx \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Para $\psi = u_n$ tenemos

$$M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)(u_n)^{\alpha+1}dx \tag{2.26}$$

Como $u_n(x) \leq \dfrac{1}{n} + u_n(x)$

$$\begin{aligned}
0 < u_n(x) \leq \frac{1}{n} + u_n(x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+u_n(x)\right)^\gamma} \leq \frac{1}{u_n{}^\gamma} \\
&\Rightarrow \quad \frac{h(x)u_n}{\left(\frac{1}{n}+u_n\right)^\gamma} \leq \frac{h(x)u_n}{u_n{}^\gamma} \quad \text{pues} \quad u_n, h > 0 \\
&\Rightarrow \quad \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{\left(\frac{1}{n}+u_n\right)^\gamma}dx \leq \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{u_n{}^\gamma}dx \\
&\qquad \leq \|h\|_\infty \int_\Omega u_n{}^{1-\gamma}dx \\
&\qquad = \|h\|_\infty \int_\Omega 1.u_n{}^{1-\gamma}dx \\
&\leq \quad \|h\|_\infty \left[\int_\Omega (1^\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma \left[\int_\Omega \left(u_n^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}}dx\right]^{1-\gamma} \\
&\qquad\qquad \text{(por la desigualdad de Holder)} \\
&= \quad \|h\|_\infty \left[\int_\Omega 1dx\right]^\gamma \left[\int_\Omega u_n\right]^{1-\gamma} \\
&= \quad \|h\|_\infty\, |\Omega|^\gamma \left[\int_\Omega u_n\right]^{1-\gamma} \\
&= \quad \|h\|_\infty\, |\Omega|^\gamma\, \|u_n\|_{L^1(\Omega)}^{1-\gamma} \\
&\leq \quad \|h\|_\infty\, |\Omega|^\gamma\, C_*\, \|u_n\|^{1-\gamma}
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$\int_\Omega \frac{h(x)u_n}{\left(\frac{1}{n}+u_n\right)^\gamma}dx \leq C_1\,\|u_n\|^{1-\gamma} \quad \text{donde} \quad C_1 = \|h\|_\infty\, |\Omega|^\gamma\, C_* \tag{2.27}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k(x)(u_n)^{\alpha+1}dx &\leq \|k\|_\infty \int_\Omega u_n \ ^{\alpha+1} \\
&\leq \|k\|_\infty \|u_n\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+1}(\Omega)} \\
&\leq \|k\|_\infty C \|u_n\|^{\alpha+1} = C_2 \|u_n\|^{\alpha+1}
\end{aligned}$$

pues $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \leq C_2 \|u_n\|^{\alpha+1} \tag{2.28}$$

Como

$$M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \quad \text{por (2.26)}$$

$$\begin{aligned}
M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 &= \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \\
&\leq C_1 \|u_n\|^{1-\gamma} + C_2 \|u_n\|^{\alpha+1} \text{ por (2.27) y (2.20)}
\end{aligned}$$

Luego por lema 2.2 se tiene

$$\begin{aligned}
\delta \|u_n\|^2 &\leq M(\|u_n\|^2)\|u_n\|^2 \\
&\leq C_1 \|u_n\|^{1-\gamma} + C_2 \|u_n\|^{\alpha+1} < \infty
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &\leq \frac{1}{\delta}\left(C_1 \|u_n\|^{1-\gamma} + C_2 \|u_n\|^{\alpha+1}\right) \\
&= \frac{1}{\delta}\|u_n\|^{\alpha+1}\left(\frac{C_1}{\|u_n\|^{\gamma+\alpha}} + C_2\right) \\
\|u_n\|^{1-\alpha} &\leq \frac{1}{\delta}\left(\frac{C_1}{\|u_n\|^{\gamma+\alpha}} + C_2\right) \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Si $|u_n|$ no fuera acotada, se tendría una subsucesión $\left|u_{n_k}\right| \longrightarrow +\infty$.
Luego en (2.29)

$$\begin{array}{ccc} \left|u_{n_k}\right|^{1-\alpha} & \leq & \dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{C_1}{|u_n|^{\gamma+\alpha}} + C_2\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ +\infty & & \dfrac{1}{\delta}\, C_2 \;< \infty \end{array}$$

lo cual es una contradicción.
Luego $\|u_n\|$ es acotada y así $(\|u_n\|^2)$ acotada
Lo que concluye el Lema 2.3 $\square$

Observación 2.1 *De la continuidad de M se sigue que:*

$$0 < \delta \leq M(\|u_n\|^2) \leq M_\infty \quad , \quad n = 1, 2, ... \; .$$

Lema 2.4 *La sucesión (u_n) obtenido en* **Lema 2.1***, converge a la solución del problema* **(2.1)***.*

Demostración.- Por Lema 2.3 se tiene que, (u_n) es una sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ y como es reflexivo, entonces u_n tiene una subsucesión $u_{n_k} \equiv u_n$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{en} \quad H_0^1(\Omega)$$

Como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega) \quad ; \quad 1 \leq q < \dfrac{2n}{n-2} \quad , \quad n \geq 3$
entonces $u_n \longrightarrow u \;$ en $\; L^q(\Omega)$
Así

$$u_n(x) \longrightarrow u(x) \quad \text{c.s en} \quad \Omega$$

Ahora consideremos $\psi_1 > 0$ una autofunción de $-\Delta : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ asociada al primer autovalor λ_1 , es decir $-\Delta\psi_1 = \lambda_1\psi_1$ tal que $m_0 > \lambda_1 M_\infty \psi_1(x) \quad ; \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ donde m_0, M_∞ son números vistos en Lema 2.2 y Lema 2.3.

Por otro lado tenemos $\dfrac{1}{n} \leq 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\dfrac{1}{n} + u_n(x) \leq 1 + u_n(x) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ pues u_n es solución positiva de Lema (2.2)

Luego

$$\begin{aligned}
\frac{h(x)}{(1+u_n(x))^\gamma} &\leq \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n(x))^\gamma} \quad ; \quad h(x)>0 \text{ en } \overline{\Omega}\\
\frac{h(x)}{(1+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) &\leq \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x)\\
\frac{h_1}{(1+u_n(x))^\gamma}+k_1u_n^\alpha(x) \leq \frac{h(x)}{(1+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) &\leq \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } C = \text{mín}\{h_1,k_1\} \quad \text{donde} \quad h_1 &= \text{ínf}\left\{h(x)/x\in\overline{\Omega}\right\}\\
k_1 &= \text{ínf}\left\{k(x)/x\in\overline{\Omega}\right\}
\end{aligned}$$

$$C\left(\frac{1}{(1+u_n(x))^\gamma}+u_n^\alpha(x)\right) \leq \frac{h(x)}{(1+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) \leq \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) \tag{2.30}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}
-M(\|u_n\|^2)\Delta u_n(x) &= \frac{h(x)}{(\frac{1}{n}+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) \quad \text{en} \quad \Omega\\
&\geq \frac{h(x)}{(1+u_n(x))^\gamma}+k(x)u_n^\alpha(x) \quad \text{en} \quad \Omega \qquad \text{por (2.30)}\\
&\geq C\left(\frac{1}{(1+u_n(x))^\gamma}+u_n^\alpha(x)\right) \quad \text{en} \quad \Omega\\
&\geq m_0 > \lambda_1 \quad M_\infty \quad \psi_1(x) \quad \text{en} \quad \Omega
\end{aligned}$$

$$u_n(x)=\psi_1(x)=0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega$$

Considerando que $M(t) = C\left(\frac{1}{(1+u_n(x))^\gamma}+u_n^\alpha(x)\right)$ donde $t=u_n(x)>0$.

Como $-\Delta\psi_1 = \lambda_1\psi_1$

$$-M(\|u_n\|^2)\Delta u_n > M_\infty\lambda_1\psi_1 = M_\infty(-\Delta\psi_1) = -\Delta(M_\infty\psi_1)$$

Luego tenemos

$$\begin{cases} -\Delta(M\,\|u_n\|^2\,u_n) & > & -\Delta(M_\infty\psi_1) \quad \text{en } \Omega \\ \\ M(\|u_n\|^2)u_n & = & M_\infty\psi_1 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

entonces

$$M(\|u_n\|^2)u_n \geq M_\infty\psi_1 \ \text{ en } \ \Omega$$

de esta desigualdad se tiene

$$u_n(x) \geq \frac{M_\infty}{M(\|u_n\|^2)}\psi_1(x) > 0 \ \text{ en } \ \Omega$$

Así $u_n(x) > 0$ pues M_∞, $\psi_1(x)$, $M(\|u_n\|^2)$ son números positivos.

tenemos

$$-M(\|u_n\|^2)\Delta u_n = \frac{h(x)}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma} + k(x)u_n^\alpha \ \text{ en } \ \Omega\ .$$

Luego en la definición de solución débil de (2.2), es decir en la ecuación (2.4) colocamos $v = u_n \in H_0^1(\Omega)$, resulta

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega |\nabla u_n|^2\ dx = \int_\Omega \frac{h(x)u_n(x)}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma}\ dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \text{ pues } u_n \in H_0^1(\Omega)$$

$$M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n(x)}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma}\ dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \tag{2.31}$$

Ahora estimaremos los términos a la derecha de (2.31)

<u>AFIRMACIÓN</u>

- $$\int_\Omega \frac{h(x)u_n(x)}{(\frac{1}{n} + u_n)^\gamma}\ dx \leq C'\,\|u_n\|$$
- $$\int_\Omega k(x)u_n^\alpha u_n dx \leq C\,\|u_n\|^{1+\alpha}$$

En efecto

Como, $0 < u_n(x) \leq \frac{1}{n} + u_n(x)$ c.s en Ω

$$0 < (u_n(x))^\gamma \leq \left(\frac{1}{n} + u_n(x)\right)^\gamma$$

$$\frac{1}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n(x)\right)^{\gamma}} \leq \frac{1}{(u_n(x))^{\gamma}} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{h(x)u_n(x)}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n\right)^{\gamma}}dx = \left|\int_{\Omega} \frac{h(x)u_n(x)}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n\right)^{\gamma}}dx\right| &\leq \int_{\Omega} \frac{h(x)|u_n(x)|}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n\right)^{\gamma}}dx \\
&\leq \|h\|_{\infty} \int_{\Omega} \frac{|u_n|}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n\right)^{\gamma}}dx \\
&\leq \|h\|_{\infty} \int_{\Omega} \frac{|u_n|}{u_n^{\gamma}}dx \quad \text{por (2.32)}
\end{aligned}$$

Como

$$u_n(x) > \frac{M_{\infty}}{M(\|u_n\|^2)}\psi_1(x) > 0 \ \text{ entonces}$$

$$\frac{1}{u_n(x)} < \frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}}.\frac{1}{\psi_1(x)} \quad \text{c.s en } \ \Omega \tag{2.33}$$

$$\frac{\|h\|_{\infty}\,|u_n(x)|}{(u_n(x))^{\gamma}} \leq \|h\|_{\infty}\left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}}\right)^{\gamma}.\frac{1}{(\psi_1(x))^{\gamma}}|u_n(x)| \tag{2.34}$$

Luego integrando sobre Ω ambos lados de (2.34)

$$\|h\|_{\infty}\int_{\Omega}\frac{|u_n(x)|}{(u_n(x))^{\gamma}}dx \leq \|h\|_{\infty}\left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}}\right)^{\gamma}\int_{\Omega}\frac{|u_n(x)|}{(\psi_1(x))^{\gamma}}dx \tag{2.35}$$

Como $u_n \in H_0^1(\Omega)$, entonces por la desigualdad de Hardy-Sobolev, proposición 1.9

$$\frac{u_n}{\psi_1^{\gamma}} \in L^q(\Omega) \quad \frac{1}{q}=\frac{1}{2}-\frac{1-\gamma}{N} \ \ , \ \ 0\leq\gamma\leq 1$$

y existe una constante $C_* > 0$ tal que $\left\|\dfrac{u_n}{\psi_1^{\gamma}}\right\|_{L^q(\Omega)} \leq C_*\,\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{\infty} \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|}{(u_n(x))^{\gamma}} &\leq \|h\|_{\infty} \left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}} \right)^{\gamma} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{|u_n|}{\psi_1^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{q}} \right]^{q} dx \qquad \text{de (2.35)} \\
&= \|h\|_{\infty} \left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}} \right)^{\gamma} \left\| \left(\frac{u_n}{\psi_1^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^q(\Omega)}^{q} \\
&= \|h\|_{\infty} \left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}} \right)^{\gamma} \left\| \frac{u_n}{\psi_1^{\gamma}} \right\|_{L^q} \\
&\leq \|h\|_{\infty} \left(\frac{M(\|u_n\|^2)}{M_{\infty}} \right)^{\gamma} C_* \|\nabla u_n\|_{L^2} \qquad \text{por desigualdades Hardy-Sobolev} \\
&= C' \|u_n\|
\end{aligned}
$$

Por lo tanto se tiene que,

$$
\int_{\Omega} \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n} + u_n)^{\gamma}} \, dx \leq C' \|u_n\| \, . \tag{2.36}
$$

Ahora, probemos la segunda desigualdad de la afirmación.

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha} u_n dx \leq \|k\|_{\infty} \int_{\Omega} u_n^{\alpha+1} dx &= \|k\|_{\infty} \|u_n\|_{L^{\alpha+1}(\Omega)}^{\alpha+1} \\
\text{Como } 0 < \alpha < 1 \Rightarrow \alpha + 1 < 2 \text{ luego} & \\
H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\alpha+1}(\Omega) & \\
&\leq \|k\|_{\infty} C_3 \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^{\alpha+1} \\
&\leq C \|u_n\|^{\alpha+1}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\int_{\Omega} k(x) u_n^{\alpha} u_n dx \leq C \|u_n\|^{\alpha+1} \, . \tag{2.37}
$$

Lo que concluye la prueba de la afirmación.

Por el Lema 2.2. $\quad 0 < \delta \leq M(\|u_n\|^2)$. entonces

$$\begin{aligned}
\delta \|u_n\|^2 &\leq M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\dfrac{1}{n} + u_n)^\gamma}\,dx + \int_\Omega k(x)u_n^{\alpha+1}dx \\
&\leq C\,\|u_n\| + C'\,\|u_n\|^{\alpha+1} \quad \text{por (2.36), (2.37)}
\end{aligned}$$

lo que implica

$$\|u_n\|^2 \leq k$$

Entonces tenemos que $(\|u_n\|^2)$ es acotada, luego existe una subsucesión convergente $\left\|u_{n_k}\right\|^2$ el cual aun denotamos $(\|u_n\|^2)$:

$$\|u_n\|^2 \longrightarrow t_0$$

Además, existe $(u_m) \subseteq H_0^1(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$.
Como M es continua entonces

$$M(\|u_n\|^2) \longrightarrow M(t_0). \tag{2.38}$$

De la convergencia débil

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi dx \longrightarrow \int_\Omega \nabla u \nabla\psi dx \quad \forall\psi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.39}$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}
u_n(x) &\longrightarrow u(x) \quad \text{c.s en } \Omega \\
\frac{1}{n} + u_n(x) &\longrightarrow u(x) \quad \text{c.s en } \Omega \quad n \longrightarrow +\infty \\
\frac{1}{\left(\dfrac{1}{n} + u_n(x)\right)^\gamma} &\longrightarrow \frac{1}{(u(x))^\gamma} \quad \text{c.s en } \Omega \\
\text{entonces } \frac{h(x)\psi}{\left(\dfrac{1}{n} + u_n(x)\right)^\gamma} &\longrightarrow \frac{h(x)\psi}{(u(x))^\gamma} \quad \text{c.s en } \Omega \\
\left|\frac{h(x)\psi(x)}{\left(\dfrac{1}{n} + u_n(x)\right)^\gamma}\right| &\leq h(x)\left|\frac{\psi(x)}{\left(\dfrac{1}{n} + u_n(x)\right)^\gamma}\right| \leq h(x)\left|\frac{\psi(x)}{(u_n(x))^\gamma}\right|
\end{aligned}$$

$$\leq \quad \|h\|_\infty \frac{M(\|u_n\|^2)}{M_\infty}\left|\frac{\psi(x)}{(\psi_1(x))^\gamma}\right| \qquad \text{de} \quad (2{,}33)$$

$$\leq \quad C\left|\frac{\psi(x)}{(\psi_1(x))^\gamma}\right| \qquad \text{c.s} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$

entonces

$$\left\|\,\left|\frac{\psi}{\psi_1{}^\gamma}\right|\,\right\|_{L^1(\Omega)} \leq r_2\left\|\frac{\psi}{\psi_1{}^\gamma}\right\|_{L^2} < \infty$$

Por tanto $\left|\dfrac{\psi}{\psi_1{}^\gamma}\right| \in L^1(\Omega)$

Resumiendo tenemos que

(i) $\dfrac{h(x)\psi}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n(x)\right)^\gamma} \longrightarrow \dfrac{h(x)\psi}{(u(x))^\gamma}$ c.s en Ω

(ii) existe una función $\left|\dfrac{C\psi}{\psi_1{}^\gamma}\right| \in L^1(\Omega)$ tal que

$$\left|\frac{h(x)\psi(x)}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n(x)\right)^\gamma}\right| \leq C\left|\frac{\psi(x)}{(\psi_1(x))^\gamma}\right| \qquad \text{c.s. en} \quad \Omega$$

Entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue $\dfrac{h\psi}{[u_n]^\gamma} \in L^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{h(x)\psi}{\left(\dfrac{1}{n}+u_n(x)\right)^\gamma}dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(u(x))^\gamma}dx \tag{2.40}$$

Similarmente se prueba que

$$\int_\Omega k(x)\, u_n^\alpha \;\psi dx \longrightarrow \int_\Omega k(x)\, u^\alpha \;\psi dx \tag{2.41}$$

En la definición de solución débil de (2.3) se tiene

$$M(\|u_n\|^2)\int_\Omega \nabla u_n \nabla\psi \; dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{(\dfrac{1}{n}+u_n)^\gamma}\; dx + \int_\Omega k(x)\, u_n^\alpha\, \psi dx \quad , \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Tomando límites, se sigue de (2.39), (2.40), (2.41) y (2.38) que

$$M(t_0)\int_\Omega \nabla u \nabla \psi dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{u^\gamma}dx + \int_\Omega k(x)u^\alpha \psi dx \quad , \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.42}$$

Por otro lado, también se tiene

$$M(\|u_n\|^2)\,\|u_n\|^2 = \int_\Omega \frac{h(x)u_n}{(\frac{1}{n}+u_n)^\gamma}\;dx + \int_\Omega k(x)\,u_n^{\alpha+1}\,dx \tag{2.43}$$

Aplicando límite a (2.43) cuando $n \longrightarrow +\infty$ y por (2.28), resulta

$$M(t_0)t_0 = \int_\Omega h(x)\,u^{1-\gamma}(x)\;dx + \int_\Omega k(x)\,u^{\alpha+1}\;dx \tag{2.44}$$

Haciendo $\psi = u$ en (2.42) se tiene

$$M(t_0)\,\|u\|^2 = \int_\Omega h(x)\,u^{1-\gamma}(x)\;dx + \int_\Omega k(x)\,u^{\alpha+1}\;dx \tag{2.45}$$

Comparando (2.44) y (2.45) tenemos

$$M(t_0)t_0 = M(t_0)\,\|u\|^2$$

$M(t_0)[\;t_0 - \|u\|^2\;] = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \|u\|^2, \quad$ pues $\;M(t_0) > 0$

De (2.42), concluimos que

$$M(\|u\|^2)\int_\Omega \nabla u \nabla\psi\;dx = \int_\Omega \frac{h(x)\psi}{u^\gamma}\;dx + \int_\Omega k(x)\,u^\alpha\,\psi dx \qquad \text{para todo} \quad \psi \in H_0^1(\Omega),$$

esto es $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de:

$$\begin{cases} -M(\|u\|^2)\Delta u = \dfrac{h(x)}{u^\gamma} + k(x)u^\alpha & \text{en} \quad \Omega \\ \qquad u > 0 & \\ \qquad u = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Lo que prueba el Lema 2.4.

Demostración del Teorema 2.1.1. Es una consecuencia inmediata de los Lemas 2.1 - 2.4.

$\square$

2.3. Unicidad

Probaremos la unicidad de solución débil del sistema (2) para

$M(s) = m_0 + bs \quad , \quad m_0 > 0 \quad , \quad b \geq 0 \quad , \quad k \equiv 0$

Sean $u, v \in H_0^1(\Omega)$ dos soluciones de (2). Luego

$$\left(m_0 + b\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla u.(\nabla(u-v))dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{u^\gamma}(u-v)dx + \int_\Omega k(x)u^\alpha(u-v)dx$$

$$\left(m_0 + b\int_\Omega |\nabla v|^2 dx\right)\int_\Omega \nabla v.(\nabla(u-v))dx = \int_\Omega \frac{h(x)}{v^\gamma}(u-v)dx + \int_\Omega k(x)v^\alpha(u-v)dx$$

Restando las dos ecuaciones anteriores resulta

$$m_0 \|u-v\|^2 + b\left[\|u\|^4 - (\|u\|^2 + \|v\|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \|v\|^4\right]$$

$$\underbrace{-\int_\Omega k(x)\,(u^\alpha - v^\alpha)\,(u-v)dx}_{0}\underbrace{-\int_\Omega h(x)\left(\frac{1}{u^\gamma} - \frac{1}{v^\gamma}\right)(u-v)dx}_{\geq 0} = 0$$

$\Longrightarrow m_0 \|u-v\|^2 \leq 0.$

Lo que implica $u = v$

Observación:

(i) $\|u\|^4 - (\|u\|^2 + \|v\|^2)\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \|v\|^4 \geq \|u\|^4 - \|u\|^3\|v\| - \|v\|^3\|u\| + \|v\|^4$

$$= (\|u\| - \|v\|)^2(\|u\|^2 + \|u\|\,\|v\| + \|v\|^2) \geq 0$$

(ii) Si $0 < \gamma < 1$ se tiene: $(c^{-\gamma} - d^{-\gamma})(c-d) \leq 0 \quad , \quad \forall c, d > 0$

Luego $\displaystyle\int_\Omega h(x)\left(\frac{1}{u^\gamma} - \frac{1}{v^\gamma}\right)dx \leq 0.$

Observación: También podemos obtener unicidad, para otra clase de funciones M (ver conclusiones)

Capítulo 3

El método numérico

En esta sección aplicaremos el método de elementos finitos para resolver (numéricamente) la ecuación

$$\begin{cases} -M(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx)\Delta u = f & \text{en} \quad \Omega \\ \\ u = 0 & \text{en} \quad \Gamma \end{cases} \tag{3.1}$$

Para la implementación del método, necesitamos la formulación débil del problema.
Hallar $w_m \in V_m$ tal que

$$M(\int_\Omega |\nabla w_m|^2 \, dx) \int_\Omega \nabla w_m \nabla v dx = \int_\Omega f v dx \quad , \quad \forall v \in V_m \tag{3.2}$$

donde V_m es el subespacio del elemento finito de $H_0^1(\Omega)$ asociado a una triangulación τ_m de $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.
Sea $\{\phi_i\}_{i=1,2,...,m}$ una base de V_m asociada con los nodos de τ_m.
Luego podemos escribir la solución w_m de (3.2) como

$$w_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \phi_i$$

para algunos α_i , $i = 1, 2, ..., m$ en $\mathbb{R}$.
Pongamos $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$. Luego podemos expresar (3.2) mediante el sistema de m ecuaciones no lineales, con m incognitas α_i, siguiente

$$F_j(\overrightarrow{\alpha}) = F_j(w_m) = 0 \ , \ 1 \leq i \leq m \tag{3.3}$$

donde $F_j(w_m) = M(\int_\Omega |\nabla w_m|^2\, dx) \int_\Omega \nabla w_m \nabla \phi_j dx - \int_\Omega f \phi_j dx \quad , \quad 1 \leq i \leq m$ Para computar (realización del cálculo numérico) la solución $\overrightarrow{\alpha}$ de (3.3), usamos el método iterativo de Newton-Raphson; para ello calculamos la matriz jacobiana del sistema (3.3).
Cada elemento de la matriz jacobiana adopta la forma

$$\frac{\partial F_j}{\partial \alpha_i}(w_m) = M'(\int_\Omega |\nabla w_m|^2\, dx)(2 \int_\Omega \nabla w_m \nabla \phi_i dx)(\int_\Omega \nabla w_m \nabla \phi_i dx) + M(\int_\Omega |\nabla w_m|^2\, dx) \int_\Omega \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx$$

Con esta fórmula, ya podemos hacer el cálculo númerico con algun progarma matemático (Matlab, por ejemplo).
Y así resolver el sistema (3.3), y en consecuencia (3.2).

Observación

(1) El cálculo numérico de la matriz jacobiana con el método de Newton-Raphson requiere una gran capacidad de memoria y un alto número de operaciones.

(2) Para invertir la matriz jacobiana puede usarse la fórmula de Sherman-Marrison-Woodbary [24]

Capítulo 4

Conclusiones

- El método de Galerkin, unido a la técnica de perturbación permite abordar positivamente el problema de obtener existencia de solución débil a problemas quasilineales, con término singular, como el estudiado.
- Es posible generalizar nuestro estudio a sistemas acoplados del mismo tipo que el problema aquí resuelto.
- La unicidad también está restringida al comportamiento de M. Podemos obtener unicidad cuando M es por ejemplo localmente Lipchitziana.
- La técnica empleada, puede aplicarse a problemas similares, por ejemplo a ecuaciones con el operador ∇^2 (biarmónico).
- Es un tópico interesante abordar el problema en el contexto de los especios de Sobolev con exponente variable.

Bibliografía

[1] Adams, R. , Fourier, J. ; **sobolev space**. Elsevier. second edition (2003).

[2] C.O. Alves, F.J.S.A. Correa & T.F. Ma, **Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type**, Computers and Mathematics with Applications, 49, (2005) 85-93

[3] D. Arcoya, J.I. Diaz & L. Tello, **S-Shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in climatology**, J. Differential Equations, 150 (1988) 215 - 225.

[4] Brezis H. **Analyse functionalle, Theorie et Applications**. Collection Mathematiques Appliquées Pour la Maitrise. Masson (1987).

[5] F.J.S.A. Correa, **On positive Solution of Nonlocal and Nonvariational Elliptic Problems**, Nonlinear Analysis T. M. A., 59, 2004, 1147-1155

[6] F.J.S.A. Correa & S.D.B. Menezes, **Existence of solutions to nonlocal and sin- gular elliptic problems via Galerkin method**, Electronic Journal of Di?erential Equations, (2004), 1-10.

[7] F.J.S.A Correa and Giovany M. Figueiredo, **On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods**. Bull Austral Math. Soc Vol. 74 (2006), pp 263 - 277.

[8] F.J.S.A Correa, **On an elliptic equation involving a Kirchhoff term and a singular perturbation**. Bull. Math Soc. 14 (2007) 15 - 24.

[9] M. Chipot, & B. Lovat, **On the asymptotic behavior of some nonlocal problems**, Positivity, 3(1999), 65-81.

[10] M. Chipot, **Elements of Nonlinear Analysis**, Birkhauser Advanced Text, 2000.

[11] D.G. De Figueiredo , **Positive solutions of semilinear elliptic problems**, Lecture Notes in Mathematics, 957, Springer-Verlag, (1982).

[12] De Figueiredo, D.G, **Equacoes Elipticas nao lineares**, 11° coloquio Brasileiro de Matemática IMPA, Pacos de caldas (1977).

[13] Deng, W., Li, Y. and Xie, C., **Blow-up and global existence for an nonlocal degenerate parabolic system**, Journal of Mathematical Analysis and Applications 277 (2003), 199-227.

[14] J.T. Diaz **Nonlinear partial differential equations and free boundaries**, Vol. I, Elliptic equation, London (1985).

[15] Gatica, Massiel. **Espacio de funciones: Una introducción a los espacios de Sobolev**. Tesis (2011).

[16] Gatica Gabriel **Introducción al analisis funcional: Teoria y aplicaciones**. Editorial reverte. España (2014).

[17] Gilbarg D. , Trudinger N. , **Elliptic partial differential equations of second order**. Springer - Verlay (2001).

[18] W. Gobaerts and J.D. Pryce, **Block elimination with one refinement solves bordered linear systems accurateky**, BIT 30 (1990), PP 490 - 507.

[19] G.H. Hardy, J. Littlewood & G. Polya , **Inequalities**, Cambridge University Press.

[20] Kirchhoff; **Mechanik**, Teubner, Leipzig, 1883

[21] J. L. Lions, **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires**, Dunod, Paris (1969).

[22] J. L. Lions, **On Some Questions in Boundary Value Problems of Mathematical Physics**, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ,(1978)

[23] T.F. Ma, **Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type**, Nonlinear Analysis, T.M.A. Article in press.

[24] Medeiros, L. A. y Milla Miranda M. **Espacos de Sobolev, Iniciacao aos problemas elipticos noa Homogeneos**. Rio de Janeiro RJ 1999.

[25] Zhang, R. and Yang, Z., **Global existence and blow-up solutions and blow-up estimates for a non-local quasilinear degenerate parabolic system**, Applied Mathematics and Computation. 200 (2008), 267-282.

[26] Fatori L. H, Muñoz Rivera J.E **Smoothing effect and propagations of singularities for viscoelastic plates**, J Math Appl p 397 - 427 (1997).